رياضيات للإقتصاديين

م. گيلان احمد جميل

سالی خویندنی

2025-2024

المصادر

- عدنان جابر , الرياضيات للاقتصاديين, [illegible], وزارة التعلية العالي والبحث العلمي, بيت الحكمة, جامعة بغداد, بغداد.
- اثيل الجومرد, مقدمة في الرياضيات الاقتصادية, [illegible], وزارة التعلية العالي والبحث العلمي, مديرية دار الكتب للطباعة والنشر, جامعة الموصل.

تر- زكية احمد مشعل و وليد اسماعيل السيفو, الرياضيات في العلوم الاقتصادية والتجارية, [illegible], الطبعة [illegible], الاصلية للنشر والتوزيع, بيروت.

ير- د. عادل احمد هدو, الرياضيات للاقتصاد و العلوم الادارية, [illegible], الطبعة الاولى, دار المسيرة للنشر والتوزيع و الطباعة, عمان, الاردن.

سم- الانترنيت.

الفصل الاول: العلاقات و الدوال و استخداماتها في الاقتصاد

- تعاريف اساسية
- الرسم البياني للدالة
- انواع الدوال:

1- الدالة المعكوسة
2- الدالة الضمنية
3- الدالة الخطية
4- الدالة التربيعية
5- الدالة التكعيبية
6- الدالة النسبية
7- الدالة الاسية
8- الدالة اللوغارتمية

الفصل الثاني: الدوال الاسية و اللوغارتمية

1- الدوال الاسية:

أ- النمو المتقطع

ب- النمو المستمر

2- الدوال اللوغارتمية.

الفصل الثالث: المشتقات

1- قوانين المشتقات

2- مشتقة الدالة المركبة (قاعدة السلسلة)

3- المشتقات الجزئية

4- المشتقات من المراتب العليا

الفصل الرابع : التكامل

1- مفهوم التكامل

2- قواعد التكامل

3- التكامل المحدد

الفصل الخامس: الجبر الخطي

1- المصفوفات

2- بعض انواع المصفوفات

3- جمع المصفوفات

4- الضرب الكمي للمصفوفات

5- ضرب المصفوفات

6- مبدلة المصفوفة

7- المصفوفات المتماثلة

8- المحددات

9- طرق حساب المحددات

أ- الطريقة الخاصة ب-طريقة المحدد والمرافق

10- المصفوفة المرافقة

11- معكوس المصفوفة

12- المعادلات الخطية

13- طرق حل المعادلات الخطية:

أ- طريقة المحددات(**گريمر**)

ب- طريقة المعكوس

ج- طريقة المبدلة

الفصل الاول
العلاقات والدوال و استخداماتها في الاقتصاد

- **اولاً : تعاريف اساسية:**
- **الثابت العددي(numerical constant):** و هي قيمة ثابتة لا تتغير بتغير المسألة التي هي قيد البحث.
- C= 3+b(y)
- **الثابت الرمزي (symbolic constant):** وهي قيمة ثابتة ضمن المسألة التي هي قيد البحث و تتغير هذه القيمة بتغير المسألة نفسها.
- C= a+b(y)

- **المتغير(variable):** وهي قيمة تتغير ضمن مدى محدد وفق المسألة التي هي قيد البحث.

- **المعامل(coefficient):** وهو ثابت رمزي او عددي مضروب بمتغير.
- **الدالة(function):** تعبر الدالة عن علاقة بين متغيرين او اكثر ,
- مثال: الدالة البسيطة , العلاقة بين المتغيرين (x.y) : y=f(x)
- مثال: الدالة متعددة المتغيرات:

Qd= f(p,k,R,Y,T)

P= price **Y= income**

K= complementary **T= taste**

R= substitutes

- يمكن تحويل الدالة الى علاقة محددة
- $Qd = a - bp - ck + dR + eY \pm f\,T$

- حيث ان (b ,c , d , e , f) معاملات و ان (a) هو ثابت .
- تتوقف العلاقات بين المعاملات و الثابت على طبيعة العلاقة بين المتغير المعتمد (Qd) و المتغيرات المستقلة , ففي دالة الطلب تكون (a) موجبة , و تكون (b) سالبة لطبيعة العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة وسعرها, اما (c) فالمتوقع ان تكون سالبة للعلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة من السلعة و سعر السلعة المكملة, في حين ان (d) تكون اشارتها موجبة لوجود علاقة طردية بين الكمية المطلوبة و سعر السلعة المنافسة, و تكون العلاقة بين الدخل والكمية المطلوبة طردية في حالة السلع الاعتيادية لذا فأن (e) غالباً تكون اشارتها موجبة, اما متغير الذوق لايظهر اشارتها اي لايمكن التنبؤ به و يتوقف على اذواق المستهلكين.

و يمكن ان تأخذ الدالة الصيغة التالية:

$$Qd = 35 - 2.2p - 0.25k + 0.3R + 0.4Y + 0.22T$$

افتراض:

اذا افترضنا ان قيم جميع المتغيرات الاخرى (عدى سعر السلعة نفسها) ثابتة فيمكن كتابة المعادلة كالآتي:

$$Qd = 55 - 2.2p$$

حيث تعزى الزيادة في قيمة الثابت بمقدار (20) الى القيم الثابتة الاخرى التي اضيفت اليه.

- **النسب الجزئية(Proportion):** قسمة عدد الحالات ضمن مجموعة (صنف) معين على العدد الكلي للمجموعات (الاصناف) فأن القانون لحساب (P) يكون كالاتي

$$p = \frac{n(a)}{n(t)}$$

حيث:

P = **النسب الجزئية** .

$n(a)$ = **عدد حالات التصنيف** .

$n(t)$ = **عدد الحالات الكلية للتصنيفات**

- **النسب المئوية (percentages) :** قانونها الرياضي هو نفس قانون النسبة الجزئية و لكن مضروب في عدد (100) أي :

$$p = \frac{n(a)}{n(t)} \text{ x } (100)$$

ثانيا- الرسم البياني للدالة

- افترض ان لدينا دالة الاستهلاكية الاتية:

$$C = f(y)$$

حيث ان الاستهلاك (c) متغير تابع للدخل و(y) متغير مستقل , يمكن ان تأخذ هذه الدالة على سبيل المثال شكل المعادلة التالية:

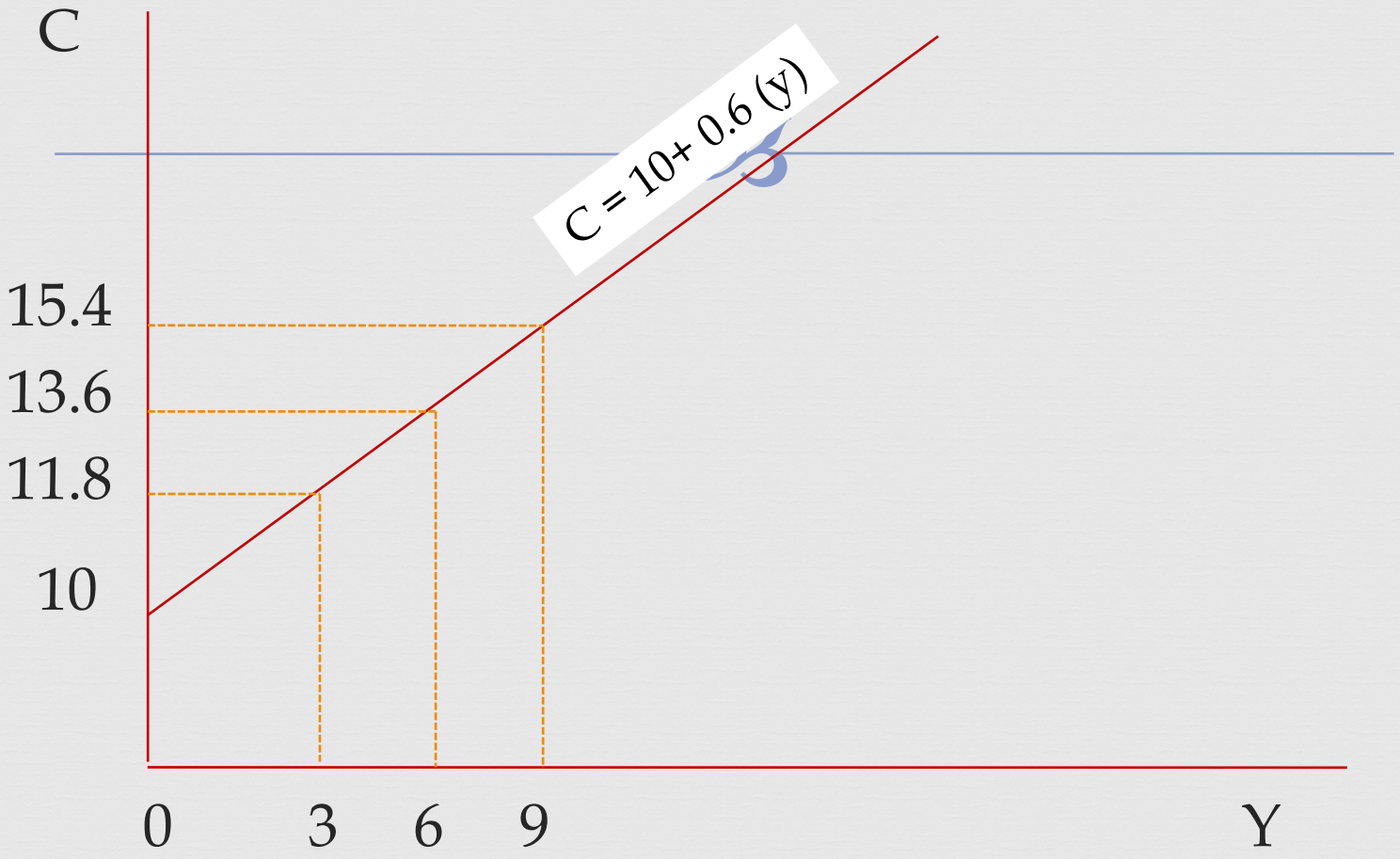
$$C = 10 + 0.6(y)$$

تعتبر هذه المعادلة خطية لأن مقدار التغير في الاستهلاك يمثل نسبة ثابتة من التغير في الدخل و تساوي (0.6) .

يمكن تمثيل العلاقة برسم بياني بأعطاء (y) قيماً افتراضية مثل (0,3,6,9)ثم نستخرج من معادلة الاستهلاك المذكورة اعلاه قيم (C) المقابل لها , كما هو موضح في الجدول التالي:

Y	C= 10 + 0.6Y	C
0	C= 10 + 0.6(0)	10
3	C= 10 + 0.6(3)	11.8
6	C= 10 + 0.6(6)	13.6
9	C= 10 + 0.6(9)	15.4

و لتمثيل المعادلة المذكورة اعلاه برسم بياني فأننا نضع نقاط (C,Y) المحتسبة في الجدول اي النقاط (10,0) , (11.8,3) , (13.6,6) , (15.4, 9) , على الرسم البياني كالاتي :


C
C = 10+ 0.6 (y)
15.4
13.6
11.8
10
0
3
6
9
Y

- و بنفس الطريقة يمكننا رسم دالة الطلب من المعادلة الاتية:

$$Qd = 6 - 1.5\ p$$

نفترض: P= (2,4,6,8,10)

- واجب

ثالثا:انواع الدوال

1- الدالة المعكوسة (inverse function):

اذا كانت لدينا دالة العرض التالية:

$Qs = f(p)$

فأن الدالة المعكوسة تكون

$f(p) = Qs$

$$P = \frac{Qs}{\text{----------}}$$

$$P = f^{-1}(Qs)$$

مثال:اذا كانت لديك دالة معكوسة التالية($2P = 40-0.5Q$)

المطلوب : حول الدالة الى دالة الاصلية.

$0.5Q=40-2p$

$$Q = \frac{40-2p}{0.5}$$

$Q= 80-4P$

2- الدالة الضمنية (implicit function):

قد لا تكون من السهل تحديد اتجاه العلاقة السببية بين المتغيرات المختلفة في الاقتصاد.

مثال: بالنسبة للعلاقة بين الدخل (Y) و المستوى الثقافي (E), نجد ان كلا من هذين المتغيرين يؤثر في الاخر و يتأثر به , فالدخل المرتفع يتيح فرصاً لأرتفاع المستوى الثقافي , كما ان ارتفاع المستوى الثقافي يتيح فرصاً افضل للعمل و دخلاً اعلى, في حالة كهذه يمكننا كتابة بشكل محايد لايعطي سمات التبعية والاستقلالية للمتغيرات في الدالة , وتعد الدالة في هذه الحالة دالة ضمنية.

امثلة:

$$Y = a + b\,E$$

$$Eb = -a + y$$

$$Y - b\,E - a = 0$$

معادلة الدالة الضمنية :

$$x^2 + y^2 + xy + 2x - 4y + 5 = 0$$

خط الميزانية (Budget line)

من الدوال التي تأخذ الصيغة الضمنية في الاقتصاد هي دالة خط الميزانية, فأذا افترضنا ان دخل المستهلك هو (M) و انه من المتاح له ان يشتري من سلعتين (x_2 , x_1)

بسعرين (p1) و (p2) على التوالي , على ان ينفق كافة دخله , فأن دالة خط الميزانية يمكن ان تأخذ الشكل الاتي:

$$M=X_1P_1+X_2P_2$$

يمكن اعادة كتابة الدالة لتحديد كمية سلعة (X1) كالاتي:

$$M - x2p2 = x1p1$$

$$X1p1 = M - x2p2$$

$$\boldsymbol{X1 = \frac{M}{P1} - \frac{X2P2}{P1}}$$

ويمكن اعادة كتابة الدالة لتحديد كمية سلعة (X2) كالاتي:

$$M - x1p1 = x2p2$$

$$X2P2 = M - x1p1$$

$$\boldsymbol{X2 = \frac{M}{P2} - \frac{X1P1}{P2}}$$

و بكتابة الدالة الضمنية نتجنب تحديد اتجاه العلاقة السببية بين المتغيرين (X1) و (X2) فالدالة الضمنية لميزانية الدخل هي :

$$M - P1X1 - P2X2 = 0$$

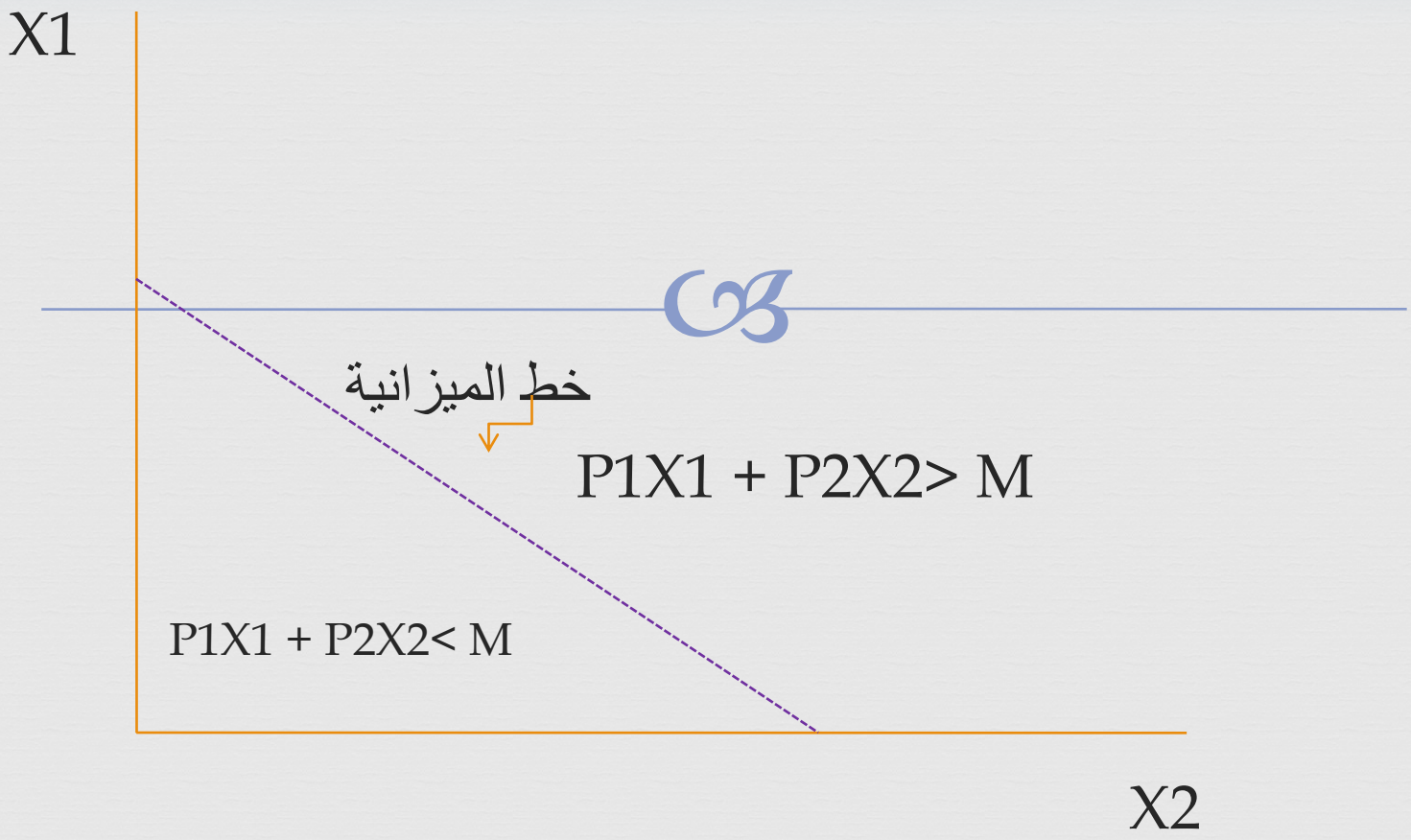
- و بالامكان رسم خط الميزانية المذكورة كالاتي , لو افترضنا ان جميع دخل المستهلك انفق على السلعة (X1) فقط فأن (X2) تكون صفراً, في حين ان الكمية المشتراة من (X1) تساوي ($\frac{M}{P1}$)

- اما اذا انفق جميع الدخل على (X2) فأن (X1) تكون صفراً , و الكمية المشتراه من (X2) تساوي ($\frac{M}{P2}$).

- اي ان خط الميزانية يقطع المحور العمودي عند النقطة ذات الاحداثيات (0, $\frac{M}{P1}$)

و يقطع المحور الافقي عند النقطة ذات الاحداثيات ($\frac{M}{P2}$, 0),

كما في الشكل البياني التالي:



حيث ان اية نقطة تقع على خط الدخل تمثل تشكيلة من السلعتين يبلغ مجموع قيمتها مقدار دخل المستهلك (M) و تعد دالة خط الميزانية دالة خطية لأن التغير في (X2) يمثل نسبة ثابتة من التغير في (X1) مقدارها (P1/P2).

مثال : اذا كانت سعر السلعة (X1) يساوي ($12) وحدات و سعر السلعة (X2) يساوي ($16) وحدات .

المطلوب :

1- ارسم خط الميزانية اذا علمت ان دخل المستهلك ($1500) .

2- بين التغير الحاصل في خط الميزانية اذا انخفض سعر السلعة (X1) الى (10) وحدات .

3- ناقش مغزى النقاط الواقعة على خط الميزانية و النقاط الواقعة دونه.

واجب

الحل : لكي نرسم خط الميزانية نفترض ان الدخل المستهلك (M=1500) ينفق بكامله على السلعتين (x2,x1) اي ان:

M=P1X1+P2X2

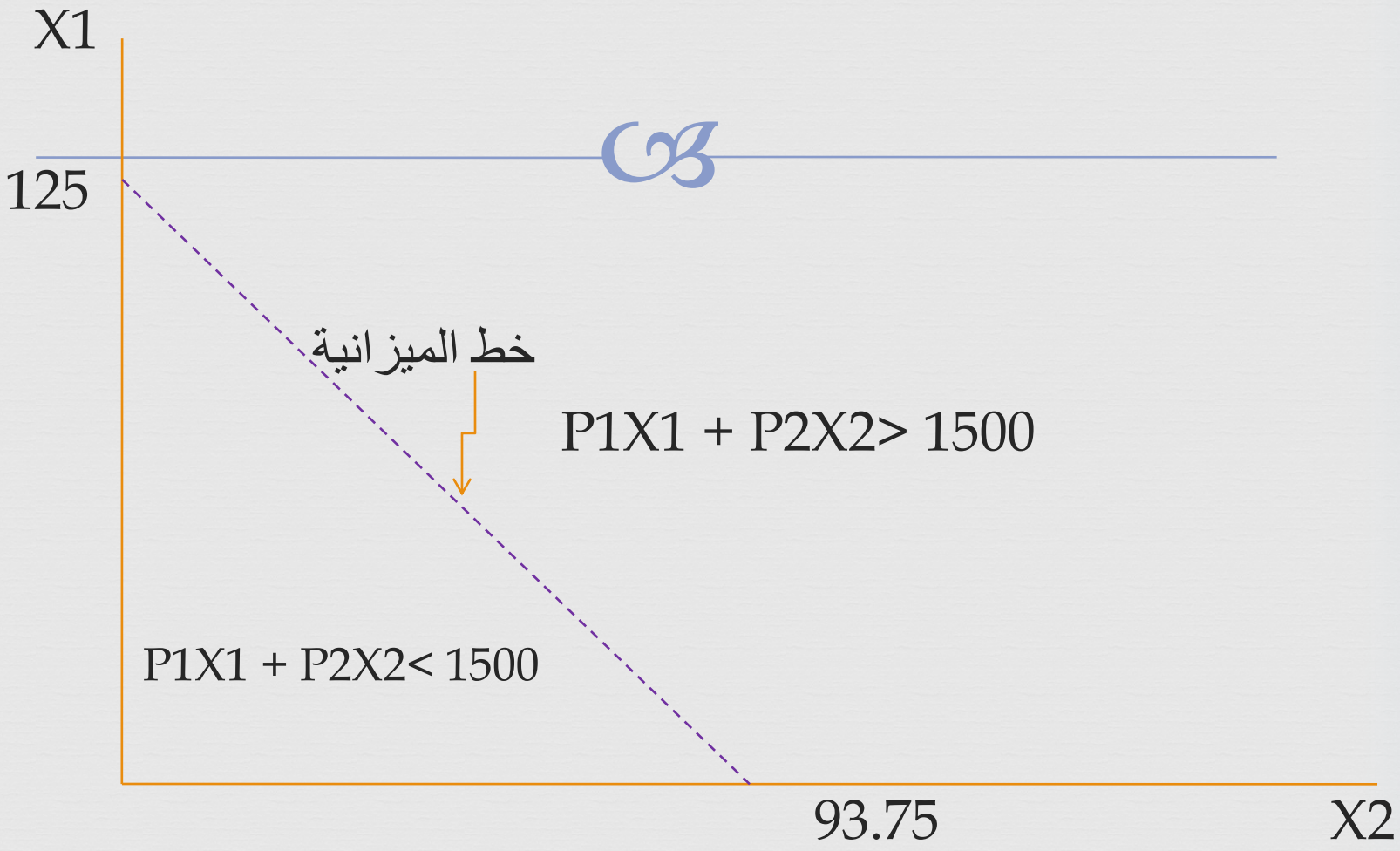
افتراض: 1-جميع دخل المستهلك ينفق على سلعة (X1) و(X2=0), و كمية المشتراه من (X1) تكون:

$$X1 = \frac{M}{P1} - \frac{X2P2}{P1} = \frac{1500}{12} - \frac{(0)P2}{P1} = 125$$

افتراض: 2- جميع دخل المستهلك ينفق على سلعة (X2) و(X1=0), والكمية المشتراه من (X2) تكون:

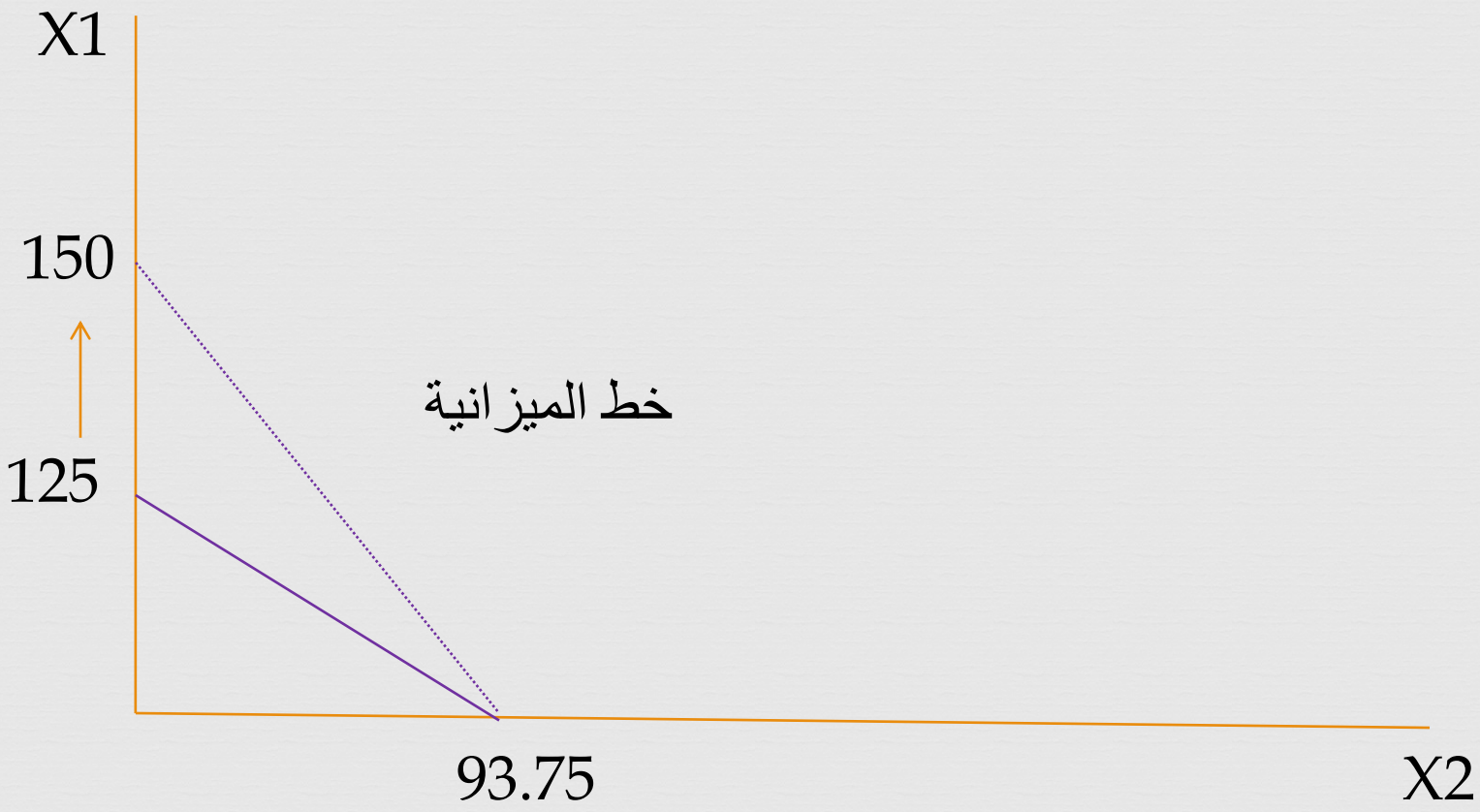
$$X2 = \frac{M}{P2} - \frac{X1P1}{P2} = \frac{1500}{16} - \frac{(0)P1}{P2} = 93.75$$

اي ان خط الميزانية يقطع الخط العمودي عند النقطة (125,0), و يقطع المحور الافقي عند النقطة (0,93.75) كما في الشكل البياني التالي:


X1
125
خط الميزانية
P1X1 + P2X2> 1500
P1X1 + P2X2< 1500
93.75
X2

2- عند انخفاض سعر (x1) من (12) الى (10) فأن نقطة تقاطع خط الميزانية مع المحور العمودي تنتقل الى اليمين اي ان:

$$X1 = \frac{M}{P1} - \frac{X2P2}{P1} = \frac{1500}{10} - \frac{(0)16}{10} = 150$$



- حيث ان جميع النقاط الواقعة على خط الدخل تمثل تشكيلة من السلعتين (X2,X1) يبلغ مجموع قيمتها مقدار دخل المستهلك ($1500), اما النقاط الواقعة دون خط الميزانية فتبين ان الانفاق على السلعتين هو دون مستوى الدخل , اي ان النقاط الواقعة تحت خط الدخل يعني هناك جزء من الدخل لم ينفق على اي من السلعتين. او ان النقاط الواقعة فوق خط الدخل يعني مجموع قيمة السلعتين خارج قدرة دخل المستهلك.

مثال : اذا كانت سعر السلعة (X_1) يساوي (6) وحدات و سعر السلعة (X_2) يساوي (9)وحدات .

المطلوب :

1- ارسم خط الميزانية اذا علمت ان دخل المستهلك (2500$) .

2- بين التغير الحاصل في خط الميزانية اذا ارتفع سعر السلعة (X_2) الى (10) وحدات و انخفض سعر السلعة (x_1) الى (5).

3- ناقش مغزى النقاط الواقعة على خط الميزانية و النقاط الواقعة دونه.

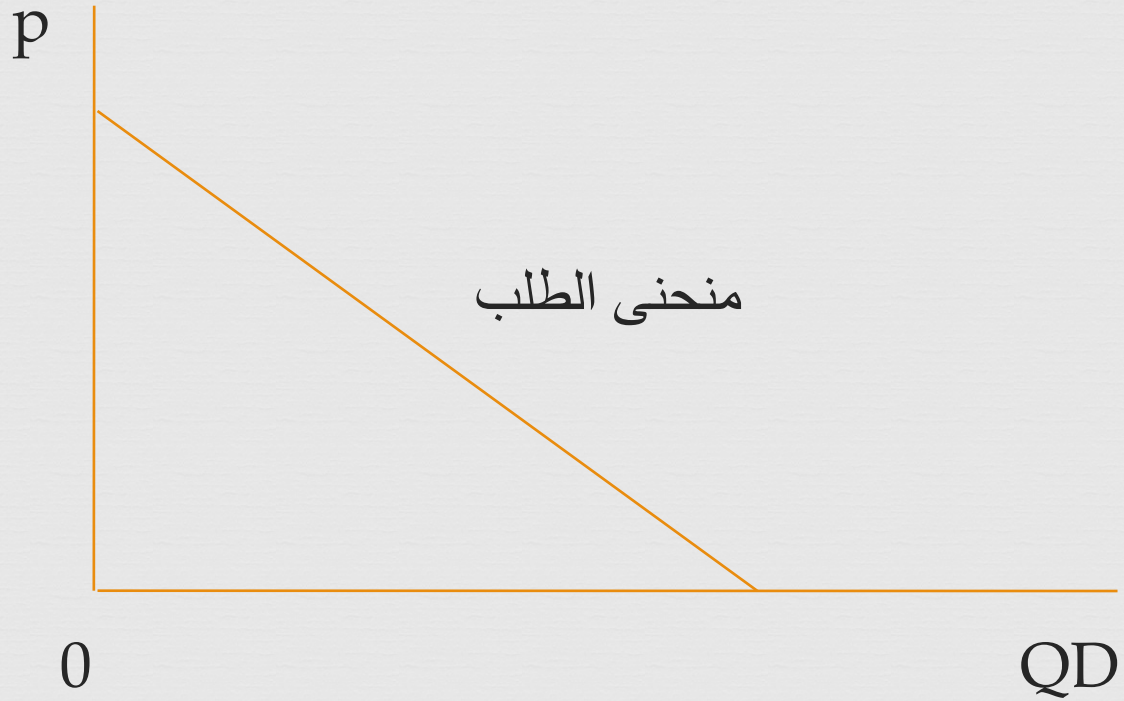
واجب

3- الدالة الخطية (Liner Function):

وهي مشابهة في صيغتها الرياضية لصيغة دالة الطلب ($Qd=a_0 - a_1x$),

و اعلى اس فيها ل(x) يساوي واحد , وهي دالة متعددة الحدود من الدرجة الاولى

حيث ان قيم ($a_2,a_3,a_4.....a_n$) في هذه الحالة تساوي صفراً, و يجب ان (a_1) لاتساوي صفراً .



4- الدالة التربيعية (Quadratic Function):

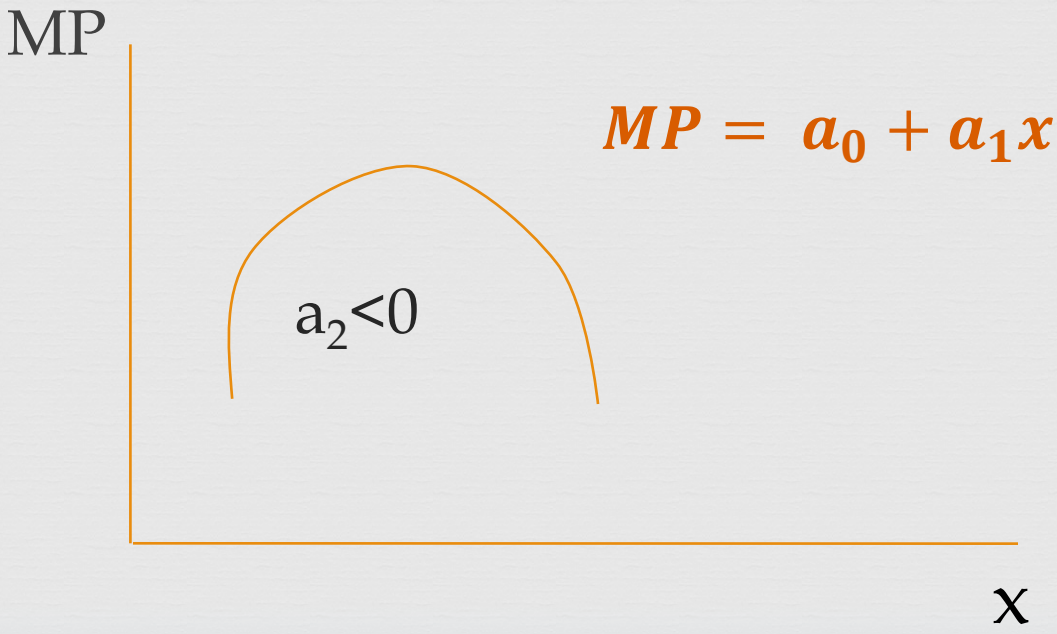
تأخذ هذه الدالة الصيغة الرياضية التالية:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

وهي مشابهة لدالة الايراد الحدي و الدالة التكلفة الحدية, و اعلى اس في هذه الدالة يساوي (2) لذا فهي دالة من الدرجة الثانية حيث ان قيم ($a_3, a_4 \ldots\ldots a_n$) تساوي صفراً, ويجب ان ($a_2$) لاتساوي صفراً.

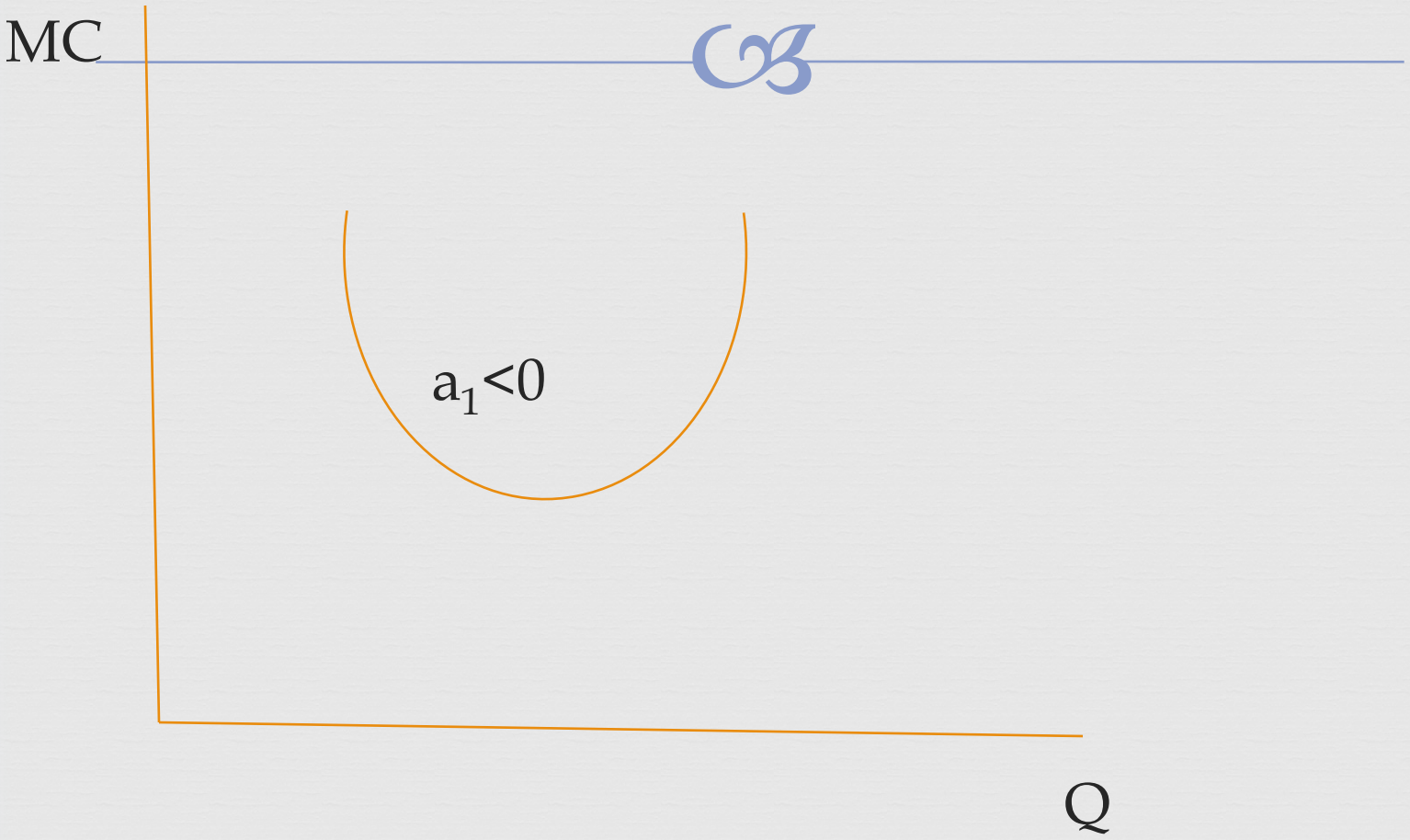
مثال : اذا كانت لدينا دالة الانتاج الحدية التالية فيمكن رسمها بالشكل ادناه :

$$MP = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$



مثال : اذا كانت لدينا دالة الكلفة الحدية التالية فيمكن رسمها بالشكل ادناه:

$$MC = a_0 + a_1\, q + a_2 q^2$$



5- الدالة التكعيبية (Qubic function):

تأخذ هذه الدالة الصيغة التالية:

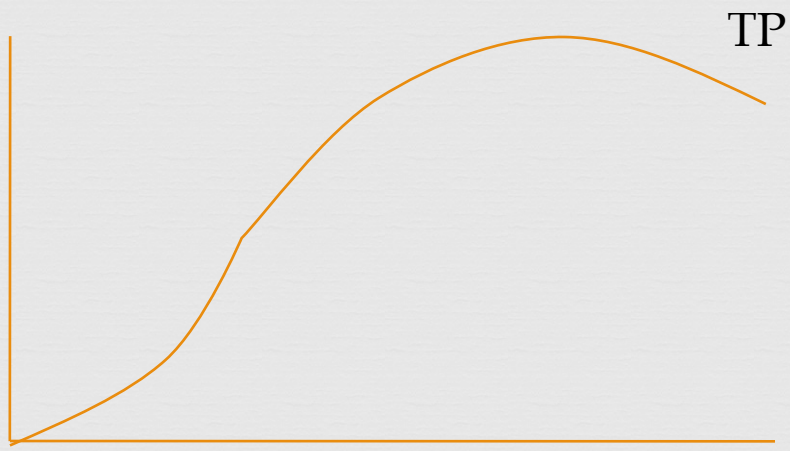
$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

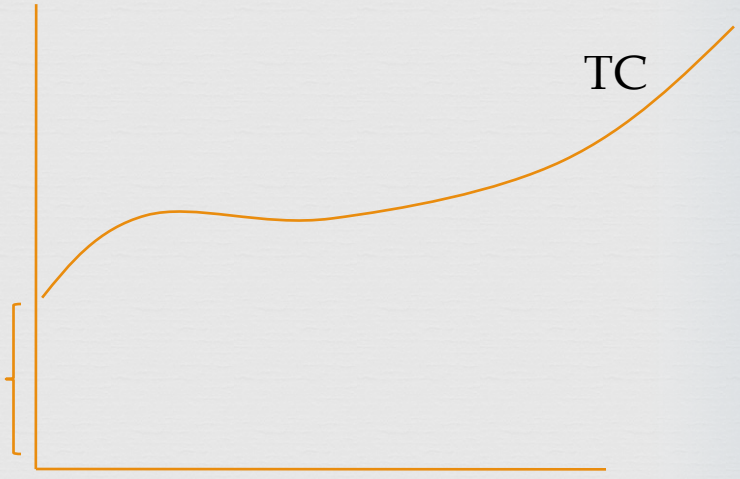
وهي مشابهة لدالة الانتاج الكلية و الدالة التكاليف الكلية و اعلى اس في هذه الدالة يساوي (3) لذا فهي دالة من الدرجة الثالثة حيث ان قيم ($a_4, a_5, a_6 \ldots\ldots a_n$) تساوي صفراً. ويجب ان ($a_3$) لاتساوي صفراً.

مثال : اذا كانت لدينا دالة الانتاج الكلية التالية فيمكن رسمها بالشكل ادناه:

$$TP = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$TC = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$





6- الدالة النسبية (Rational Function): الصيغة العامة لها :

$$A = \frac{Y}{X}$$

مثال:

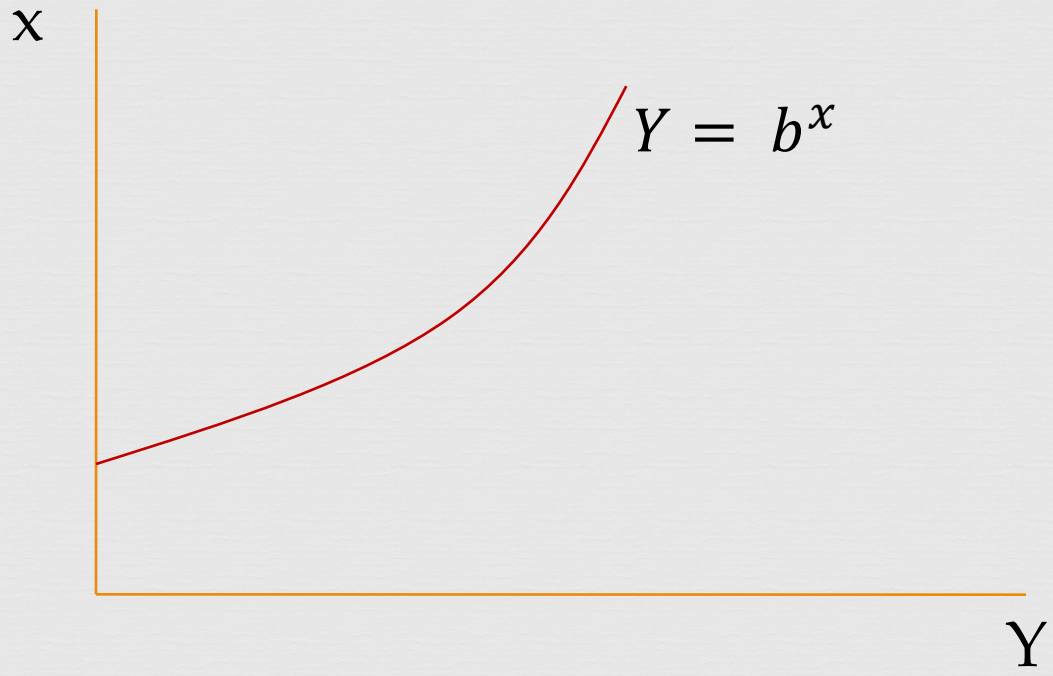
$$Y = \frac{X + 4}{3X + 2.4X^2 + 2}$$

7- الدالة الاسية (Exponential Function):

في الدالة الاسية يكون المتغير المستقل اساً لثابت عددي او رمزي, و تتستخدم هذه الدالة في تحديد مسارات النمو في المتغيرات الاقتصادية.

مثال:

$$Y = b^x$$

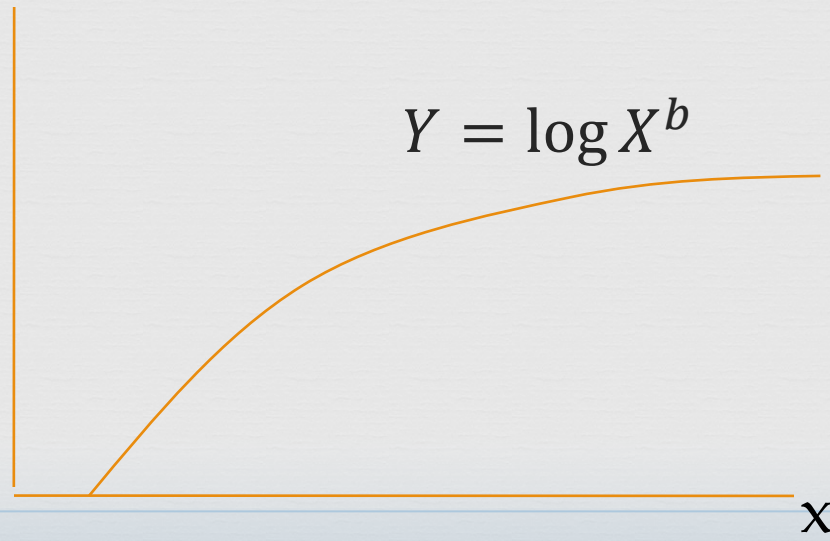


8- الدالة اللوغاريتمية (Logarithmic Function):

ان لوغاريتم اي عدد لأساس معين هو ذلك الاس الذي يجب ان يرفع اليه الاساس لينتج ذلك العدد.

مثال: اي ان لوغاريتم العدد (100) لأساس (10) يساوي (2) , حيث ان (10^2) تساوي (100) , لذا: $\log_{10} 100 = 2$

وتستخدم الدالة اللوغاريتمية لتوضيح مسار الانفاق الاستهلاكي كدالة للدخل.



مثال: اذا كانت التكاليف الثابتة في احد المصانع تساوي ($140) و كانت التكاليف المتغيرة تساوي ($4) لكل وحدة منتجة , اي ان :

المطلوب: أ- ضع الصيغة الرياضية لدالة التكاليف الكلية.

ب- ارسم دالة التكاليف المتغيرة و دالة التكاليف الكلية بيانياً.

ت- بين التغير الحاصل في التكاليف الكلية نتيجة تغير الانتاج من (50) الى (80).

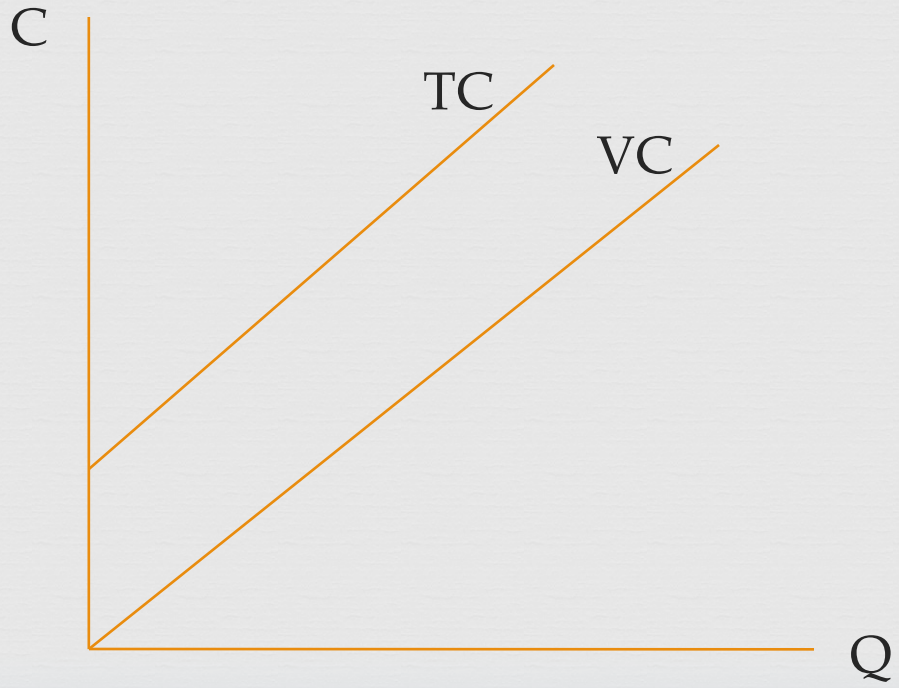
الحل: أ- التكاليف الكلية:

$Vc = 4Q$

$Fc = 140$

$Tc = Fc + vc$

$= 140 + 4Q$



ت- عندما يكون حجم الانتاج (50) وحدة فأن التكاليف الكلية تساوي :

$TC_1 = FC + VC$

$TC_1 = 140 + 4Q$

$TC_1 = 140 + 4(50)$

$TC_1 = 140 + 200 = 340$ **$TC_1 = 340$**

و بزيادة حجم الانتاج الى (80) وحدة :

$TC_2 = FC + VC$

$TC_2 = 140 + 4Q$

$TC_2 = 140 + 4(80)$

$TC_2 = 140 + 320 = 460$ **$TC_2 = 460$**

$\Delta TC = TC_2 - TC_1$

$= 460 - 340 =$ **120** التغير في التكاليف الكلية

مثال: اذا انتج المنشأة في سوق المنافسة التامة (قميص) و كانت التكاليف المتغيرة تساوي (1.8 $) لكل وحدة , و كانت التكاليف الثابتة ($35) , و سعر بيع تساوي ($3) لكل وحدة منتجة.

المطلوب: أ- ضع الصيغة الرياضية لدالة الربح.

ب- بين التغير الحاصل في الربح نتيجة تغير الانتاج من (75) وحدة الى (100) وحدة.

ت- ما حجم الانتاج الذي يكون الربح عنده صفراً؟

الحل: (أ) TR= 3Q TC= 35+1.8Q

$$\pi = TR - TC$$
$$\pi = 3Q - (35 + 1.8Q)$$
$$\pi = 3Q - 35 - 1.8Q$$
$$\pi = 1.2Q - 35$$

(ب)

$Q1=75$

$$\pi 1 = 1.2Q - 35$$
$$\pi 1 = 1.2(75) - 35$$
$$\pi 1 = 1.2(75) - 35$$
$$\pi 1 = 90 - 35$$
$$\pi 1 = 55$$

$Q2=100$

$$\pi 2 = 1.2Q - 35$$
$$\pi 2 = 1.2(100) - 35$$
$$\pi 2 = 120 - 35$$
$$\pi 2 = 85$$

$$\Delta\pi = \pi 2 - \pi 1$$

$$\Delta\pi = 85 - 55$$

$$\Delta\pi = 30$$

(ت)

$$\pi = 1.2Q - 35$$
$$0 = 1.2Q - 35$$
$$35 = 1.2Q$$
$$Q = \frac{35}{1.2}$$

Q=29.166 حجم الانتاج الذي يكون عندها الربح صفراً

مثال: اذا انتج المنشأة في سوق المنافسة التامة (كاشي) و كانت التكاليف المتغيرة تساوي ($ 0.2) لكل وحدة , و كانت التكاليف الثابتة ($74) , و سعر بيع تساوي ($ ///) لكل وحدة منتجة.

المطلوب:

- ضع الضيغة الرياضية لدالة التكاليف الكلية و دالة الايراد الكلية و دالة الربح.
- بين التغير الحاصل في الربح نتيجة تغير انتاج الكاشي من (500) الى (750).
- ما حجم انتاج الكاشي الذي يكون الربح عنده صفراً.

واجب