*الفصل الثاني
الدوال الاسية و اللوغاريتمية

اولا: الدوال الاسية:

تتكون الدالة الاسية من اساس ثابت و أس متغير, و قد يكون كل من الاساس و الاس مضروب بمقدار ثابت, و ان المعادلة التالية تمثل دالة أسية:

متغير مستقل

$$Y = B^X$$

متغير تابع

ثابت رمزي

قواعد الاس:

$1 - X^n \times X^m = X^{n+M}$

$1 - 5^6 \times 5^5 = 5^{6+5} = 5^{11}$

$2 - \dfrac{X^m}{X^n} = X^{m-n}$

$2 - \dfrac{6^4}{6^2} = 6^{4-2} = 6^2$

$3 - (X^m)^n = X^{m.n}$

$3 - (4^2)^3 = 4^{2.3} = 4^6$

$$4-\ \sqrt[n]{X^{m}}=X^{\frac{m}{n}}$$

$$4-\ \sqrt[4]{35^{3}}=35^{\frac{3}{4}}=35^{0.75}=14.39$$

$$5-\ X^{-m}=\frac{1}{X^{m}}$$

$$5-\ \mathbf{3^{-4}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3^{4}}}\mathbf{=}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{81}}$$

$$6-\ (XZ)^{m}=X^{m}Z^{m}$$

$$6-\ (XZ)^{5}=X^{5}Z^{5}$$

$$7-(\frac{X}{Z})^{m}=\frac{X^{m}}{Z^{m}}$$

$$7-(\frac{2}{3})^{3}=\frac{2^{3}}{3^{3}}=\frac{8}{27}$$

$$Y = X\sqrt{X}$$

$$Y = X.X^{\frac{1}{2}} = X^{1+\frac{1}{2}} = X^{\frac{3}{2}}$$

$$Y = a^{4X}.a^{3X}$$

$$Y = a^{4X+3X} = a^{7X}$$

$$Y = \frac{a^{6x}}{a^{4x}} = a^{6x-4x} = a^{2x}$$

$$Y = \frac{e^{t+1}}{e^{t}} = e^{(t+1)-t} = e^{1}$$

Y=

$$Y = \frac{e^{1}e^{0}}{e} = \frac{e^{1}.1}{e} = e^{1-1} = e^{0} = 1$$

$$\begin{aligned} Y &= -8\sqrt{(x+2)^{2}} \\ &= -8(x+2)^{\frac{2}{2}} \\ &= -8x - 16 \end{aligned}$$

أستخدام الدالة الأسية في الاقتصاد

1- النمو المتقطع: يمكن استخدام الدالة الاسية التالية فيما يتعلق بأستثمار الاموال:

$$F = A(1+r)^t$$

لايجاد القيم الحالية و القيم المستقبلية و أسعار الفائدة و ما الى ذلك بالنسبة لظواهر الاقتصادية بشكل متقطع, حيث ان:

F= القيمة المستقبلية .

A= القيمة الحالية .

r= سعر الفائدة .

t= الفترة الزمنية

مثال1: اذا تم اقتراض مبلغ من المال قدره (20000$) بمعدل فائدة سنوية (10%) و لمدة سنتين .

المطلوب: ما هي قيمة المبلغ في نهاية الفترة؟

الحل: (r=0.1) , (t=2) , (A=20000), (F=?)

$$F = A(1+r)^t$$

$$F = 20000(1+0.1)^2$$

$$F = 20000(1.1)^2$$

$$F = 20000(1.21)$$

$$F = 24200 \longleftarrow$$ القيمة المستقبلية

مثال2: اوجد القيمة الحالية لمبلغ (30000) دولار سيدفع بعد (4) سنوات من الان بمعدل فائدة سنوية (7.5%).

الحل: (r=0.075) , (t=4) , (A=?), (F= 30000)

$$F = A(1+r)^t$$

$$A = \frac{F}{(1+r)^t}$$

$$A = \frac{30000}{(1+0.075)^4}$$

$$A = \frac{30000}{(1.075)^4}$$

$$A = \frac{30000}{1.335}$$

$$A = 22472$$ ← القيمة الحالية

مثال3: لنفرض ان هناك مبلغاً مستثمراً من المال مقداره (10000)دولارلمدة خمس سنوات , و ان معدل عائد الاستثمار يبلغ (7%).

المطلوب: ماهي القيمة المستقبلية في الحالات التالية:

1- ان معدل عائد الاستثمار يركب بشكل سنوي .

2- ان معدل عائد الاستثمار يركب بشكل نصف سنوي .

3- ان معدل عائد الاستثمار يركب بشكل فصلي .

الحل : (r=0.07) , (t=5) , (F=?), (A=10000)

$$F = A(1+r)^t$$

$$F = 10000(1+0.07)^5$$

$$F = 10000(1.07)^5$$

$$F = 10000(1.402552)$$

$$F = 14025.52$$

القيمة المستقبلية, اذا كان معدل عائد الاستثمار يركب سنوياً

2- (m=2)

$$F = A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

$$F = 10000\left(1 + \frac{0.07}{2}\right)^{2\times 5}$$

$$F = 10000(1 + 0.035)^{10}$$

$$F = 10000(1.035)^{10}$$

$$F = 10000(1.410598)$$

$F = 14105.98$ ← القيمة المستقبلية, اذا كان معدل عائد الاستثمار يركب نصف سنوياً

(m=4) -3

$$F = A(1 + \frac{r}{m})^{mt}$$

$$F = 10000(1 + \frac{0.07}{4})^{4\times5}$$

$$F = 10000(1 + 0.0175)^{20}$$

$$F = 10000(1.0175)^{20}$$

$$F = 10000(1.41477)$$

$$F = 14147.7$$ ← القيمة المستقبلية, اذا كان معدل عائد الاستثمار يركب فصلياً

مثال3: اوجد القيمة الحالية لمبلغ (85000) دولار سيدفع بعد اربع سنوات من الان, حيث ان سعر الفائدة الدارج (8)بالمائة في الحالات التالية:

- اذا كانت الفائدة مركبة سنوياً.
- اذا كانت الفائدة مركبة نصف سنوياً.

الحل: (r=0.08) , (t=4) , (F=85000), (A=?)

- اذا كانت الفائدة مركبة سنوياً.

$$F = A(1+r)^t$$

$$A = \frac{F}{(1+r)^t}$$

$$A = \frac{85000}{(1+0.08)^4}$$

$$A = \frac{85000}{(1.08)^4}$$

$$A = \frac{85000}{1.36}$$

$$A = 62500$$

-اذا كانت الفائدة مركبة نصف سنوياً.

$$A = \frac{F}{(1+\frac{r}{m})^{mt}}$$

$$A = \frac{85000}{(1+\frac{0.08}{2})^{2\times4}}$$

$$A = \frac{85000}{(1+0.04)^{8}}$$

$$A = \frac{85000}{(1.04)^{8}}$$

$$A = \frac{85000}{1.368}$$

$$A = 62135$$

مثال4: اوجد القيمة الحالية لمبلغ (7500) دينار سيدفع بعد (6) سنوات من الان, حيث ان سعر الفائدة الدارج (6.5%)بالمائة في الحالات التالية:

-اذا كانت الفائدة مركبة نصف سنوياً.

-اذا كانت الفائدة مركبة نصف شهرياً

الحل: (r=0.065) , (t=6) , (F=7500), (A=?)

واجب

مثال4: اوجد القيمة الحالية لمبلغ (7500) دينار سيدفع بعد (4) سنوات من الان, حيث ان سعر الفائدة الدارج (10%) بالمائة في الحالات التالية:

1- اذا كانت الفائدة مركبة سنوياً.

2- اذا كانت الفائدة مركبة نصف سنوياً.

الحل: (r=0.1) , (t=4) , (F=750), (A=?)

-1

$$F = A(1+r)^t$$

$$A = \frac{F}{(1+r)^t} \qquad A = F(1+r)^{-t}$$

$$A = 750(1+0.1)^{-4} \qquad A = 750(1.1)^{-4}$$

$$A = 750(0.683)$$

$$A = 512.25$$

القيمة الحالية

(m=2) ,(A=?) ,(F=750) , (t=4) , (r=0.1) -2*

$$A = F(1+r)^{-t}$$

$$A = F\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mt}$$

$$A = 750\left(1+\frac{0.1}{2}\right)^{-2\times 4}$$

$$A = 750(1+0.05)^{-8}$$

$$A = 750(1.05)^{-8}$$

$$A = 750(0.67684)$$

$$A = 507.63$$

القيمة الحالية

2-النمو المستمر:

يمكن استخدام الدالة الاسية التالية لايجاد معدلات النمو بشكل مستمر:

$$F = A(e)^{rt}$$

الدالة الاسية الطبيعية التي يكون فيها اساس القيمة التقريبية

تستخدم هذه المعادلة لايجاد معدلات النمو بشكل مستمر كالنمو في السكان و الدخل وليست هناك فترات متقطعة كالسنوي او النصف السنوي او الفصلي.

مثال : احسب قيمة (100)دولار بفائدة (10%) لمدة سنتين في حالة اضافة سعر الفائدة بشكل مستمر.

الحل:

$$F = A(e)^{rt}$$

$$F = 100(2.71828)^{(0.1)\times 2}$$

$$F = 100(2.71828)^{0.2}$$

$$F = 100(1.22140)$$

$$F = 122.14$$ ← القيمة المستقبلية عندما تضاف الفائدة بشكل مستمر

مثال 2: اذا تقرر في خطة اقتصادية خمسية لبلد معين ان يكون الهدف هو زيادة متوسط دخل الفرد الى (750$) في نهاية فترة الخطة.

المطلوب: استخدام المعادلة الاسية لإيجاد متوسط دخل الفرد حالياً عندما يكون معدل النمو السنوي (7.3%) و يركب بشكل مستمر.

الحل : (r=0.073) , (t=5) , (F=750), (A=?)

$$F = A(e)^{rt}$$

$$750 = A(2.71828)^{(0.073)\times 5}$$

$$750 = A(2.71828)^{0.365}$$

$$750 = A(1.44051)$$

$$A = \frac{750}{1.44051} \qquad A = 520.64$$

القيمة الحالية

*ثانيا: الدالة اللوغارتمية

اللوغاريتم: هو الاس التي ترفع الى اساس معين لنحصل على عدد معين .

مثلاً:

$$Y = b^t$$

$$\log_b Y = t$$

اي نستطيع ان نقول ان (t) تمثل لوغاريتم (Y) لأساس (b) .

مثلاً:

$$16 = (4)^2$$

$$\log_4 16 = 2$$

*قواعد اللوغاريتمات

1- لوغاريتم لعدد واحد لأي اساس يساوي صفر.

2- لوغاريتم لأي عدد و أساس لنفس العدد يساوي الواحد(1).

3- لوغاريتم حاصل ضرب عددين يساوي مجموع لوغاريتم العددين.

4- لوغاريتم حاصل قسمة عددين يساوي لوغاريتم البسط مطروحاً منه لوغاريتم المقام.

5- لوغاريتم عدد مرفوع لأس يساوي حاصل ضرب ذلك الاس بلوغاريتم العدد.

$$\log x^n = n \log x$$

6- لوغاريتم عدد تحت جذر معين يساوي حاصل قسمة لوغاريتم العدد على درجة الجذر.

7- اساس اللوغاريتم الاعتيادي هو العدد (10).

8- اساس اللوغاريتم الطبيعي يساوي (e= 2.71828).

* يمكن الاستنتاج مما تقدم ان :

$$\log_{10} 1 = 0$$

$$\log_{10} 10 = 1$$

$$\log_{10} 100 = 2$$

$$\log_{10} 1000 = 3$$

$$\log_{10} 0.1 = -1$$

$$\log_{10} 0.01 = -2$$

$$\log_{10} 0.001 = -3$$

بعض الامثلة :

1- $\log_5 1 = 0$

2- $\log_6 6 = 1$

3- $\log(3.2) = \log 3 + \log 2$

$$\log(6) = \log 3 + \log 2$$

$$0.7781 = o.4771 + 0.30103$$

4- $\log\frac{7}{5} = \log 7 - \log 5$

$$\log 1.4 = \log 7 - \log 5$$

$$0.146 = 0.845 - 0.699$$

$$0.146 = 0.146$$

5- $\log 7^5 = 5 \log 7$

$$\log 16807 = 5 \times 0.845$$

$$4.225 = 4.225$$

6-

$$\log \sqrt[2]{5} = \frac{1}{2}(\log 5)$$

$$\log 2.236 = \frac{1}{2}(0.699)$$

$$0.3495 = 0.3495$$

مثال: اذا كان حجم الامثل للسكان بلد معين (25) مليون نسمة في عام (2002) و كان حجم السكان لهذا البلد قبل (10)اعوام يساوي (17) مليون نسمة.

المطلوب: ايجاد معدل النمو السنوي للسكان الذي يتعين الوصول اليه نمو السكان للوصول الى الهدف بأستخدام المعادلة اللوغاريتمية.

$$F = A(e)^{rt}$$

$$25 = 17(2.71828)^{10r}$$

$$\log 25 = \log 17(2.71828)^{10r}$$

$$\log 25 = \log 17 + 10r \log 2.71828$$

$$1.39 = 1.23 + 10r\,(0.4343)$$

$$1.39 - 1.23 = 10r\,(0.4343)$$

$$0.16 = 4.344r$$

$$r = \frac{0.16}{4.344}$$

$$r = 0.0368$$

$r = \%3.68$ ← معدل النمو السنوي للسكان

مثال: اذا تم اقتراض مبلغ من المال قدره (100)دولار بمعدل فائدة سنوية (10%) و لمدة سنتين.

المطلوب : ما هي قيمة المبلغ في نهاية المدة بأستخدام المعادلات اللوغاريتمية؟

$$F = A(1+r)^t$$

$$F = 100(1+0.1)^2$$

$$F = 100(1.1)^2$$

$$\log F = \log 100 + 2\log 1.1$$

$$\log F = 2 + 2(0.041393)$$

$$\log F = 2 + 0.08278$$

$$\log F = 2.08278$$

$$F = 10^{2.08278}$$

$$F = 121$$

القيمة المستقبلية في نهاية الفترة