الفصل الرابع
المشتقات

*المشتقة للدالة y=f (x) هي دالة يرمز لها $\bar{f}(x)$ او $\frac{dy}{dx}$,
بشرط :

ان تكون للدالة غاية (Limit) موجودة , اي قابلة للاشتقاق
حيث تبين المشتقة كدالة معدل التغير.

- يمكن استخدام تعريف المشتقة لأيجاد $\bar{f}(x)$.

$$\bar{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $f(x) = x^2 + 3x - 2$ ثم استخدم النتيجة لأيجاد قيمة المشتقة عند (x=3), عندما .

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - 2$$

$$f(x+\Delta x) = (x)^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x - 2$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = (x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x - 2) - (x^2 + 3x - 2)$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3x + 3\Delta x - 2 - x^2 - 3x + 2$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 3\Delta x$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x(2x + \Delta x + 3)$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 3$$

$$\bar{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\bar{f}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 3) \quad = 2x + 0 + 3 \quad = 2x + 3$$

عندما (x=3):

$$\bar{f}(x) = 2(3) + 3 = 9$$

1- قواعد الاشتقاق

يتناول هذا البند كيفية ايجاد المشتقة بإستخدام القواعد التي تعتبر استخداماً بديلاً عن استخدام تعريف المشتقة والتي تحتاج الى وقت وجهد كبيرين:

1- اذا كان f(x)=b حيث (b) عدد ثابت فإن $\bar{f}(x) = 0$.

* مثال: $f(x) = 20$ ⟵ $\bar{f}(x) = 0$

*2- اذا كانت $y = f(x) = x^n$ فإن لكل (n) عدد حقيقي $\bar{f}(x) = nx^{n-1}$

مثال: $\bar{f}(x) = 10x^9$ $f(x) = x^{10}$

3- اذا كانت $x = bf(x)$, فإن $\frac{dy}{dx} = b\bar{f}(x)$ و هذا يعني ان:

الثابت × الدالة = الثابت × مشتقة الدالة.

مثال:

$f(x) = 3x^2$ $\bar{f}(x) = 3(2)x^{2-1}$ ⟶ $\bar{f}(x) = 6x$

4- اذا كانت $y = f(x) \mp h(x)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \bar{f}(x) \mp \bar{h}(x)$.

مثال:

$$y = 3x^3 - 10x^2 + 20x + 30$$

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 20x + 20$$

5- اذا كانت $y = f(x) \times h(x)$

فإن: $\frac{dy}{dx} = f(x) \times \bar{h}(x) + h(x) \times \bar{f}(x)$

الدالة الاولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الاولى

$$y = (2x^4 - 5)(8 - 5x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x^4 - 5) \times (-5) + (8 - 5x) \times (8x^3)$$

$$= -10x^4 + 25 + 64x^3 - 40x^4$$

$$= -50x^4 + 64x^3 + 25$$

6- اذا كانت $y = \frac{f(x)}{h(x)}$, فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{h(x)\times\bar{f}(x) - f(x)\times\bar{h}(x)}{(h(x))^2}$

و هذا يعني :

المقام × مشتقة البسط -البسط × مشتقة المقام

مربع المقام

مثال:

$$y = \frac{x^2}{x-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-3)(2x)-(x^2)(1)}{(x-3)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2-6x-x^2}{x^2-6x+9} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2-6x}{x^2-6x+9}$$

2- مشتقة الدالة المركبة (قاعدة السلسلة)

*عبارة عن دالة مركب, كيفية اشتقاق هذه الدالة:

إذا كانت $y = f\big(h(x)\big)$, $q = h(x)$ فإن: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dq} \times \dfrac{dq}{dx}$

حيث ان (y) تكون قابلة للاشتقاق بالنسبة ل(q), و (q) قابلة للاشتقاق بالنسبة ل(x).

مثال: اذا كانت $y = q^3 + 3q^2 - 2q + 5$ و $q = 2x + 3$

جد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dq} = 3q^2 + 6q - 2$$

$$\frac{dq}{dx} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = (3q^2 + 6q - 2)(2)$$

$$\frac{dy}{dx} = (6q^2 + 12q - 4)$$

مثال: اذا كانت $y = q^2 + 5q - 1$ و $q = x + 3$

جد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dq} = 2q + 5$$

$$\frac{dq}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (2q + 5)(1) \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2q + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x + 3) + 5 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 2x + 6 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 11$$

ملاحظة: يمكن تعويض (2) من (1): $(q = x + 3)$ $(y = q^2 + 5q - 1)$

$$y = (x+3)^2 + 5(x+3) - 1$$

$$y = (x+3)^2 + 5x + 15 - 1$$

$$y = (x+3)^2 + 5x + 14$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(x+3)(1) + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 6 + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 11$$

3- المشتقات الجزئية

اذا كانت $(y=f(x_1,x_2....x_n))$ فأن المشتقة بالنسبة ل(x_1) يرمز بالرمز $\frac{\partial y}{\partial x_1}$ او F_1 او Fx_1

و تسمى بالمشتقة الجزئية , اي نشتق الى (x_1) و نجعل المتغيرات الباقية

$(x_2,x_3,.......x_n)$ في الدالة ثابتة و يرمز للمشتقة الجزئية الى (x_2) بالرمز $\frac{\partial y}{\partial x_2}$, F_2 , Fx_2 ,

و نجعل المتغيرات الباقية ثابتة , و هذه المشتقات الجزئية يمكن اشتقاقها

لمرتبة اعلى اما لنفس المتغير و يرمز لها عندئذ ($\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_1}$, F_{11} , Fx_1x_1) بالنسبة

للمتغير (x_1) و يرمز لها ($\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 x_2}$, F_{22} , Fx_2x_2) بالنسبة للمتغير (x_2).

وكذلك يمكن اشتقاق المشتقات الجزئية الاولى لمرتبة أعلى و لكنه لمتغير اخر, اي جعل المتغير الاول الذي تم الاشتقاق له اولاً ثابتاً , و يرمز لها

($\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 x_2}$, F_{12} , $F\, x_1 x_2$) بالنسبة للمتغير (x_2) , و يرمز لها ($\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 x_1}$, F_{21} ,

$F\, x_2 x_1$) بالنسبة للمتغير (x_1) حيث ($F_{21} = F_{12}$)

مثال : جد (F1,F2,F12,F21) للدالة الاتية $f(x_1, x_2) = x_1^2 x_2^3$

$$F_1 = \frac{\partial y}{\partial \mathrm{x}_1} = 2x_1 x_2^3$$

$$F_2 = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_2} = x_1^2 3x_2^2$$

$$F_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}_1 \mathrm{x}_2} = 2x_1(3x_2^2) = 6x_1 x_2^2$$

$$F_{21} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}_2 \mathrm{x}_1} = 2x_1(3x_2^2) = 6x_1 x_2^2$$

4- المشتقات من المراتب العليا

اذا كانت **y=f(x)** قابلة للأشتقاق فأن مشتقتها $\bar{f}(x)$ دالة جديدة للمتغير (x) ايضاً, فأذا كانت $\bar{f}(x)$ قابلة للأشتقاق ايضاً فأنه يطلق على مشتقتها المشتقة الثانية للدالة **f(x)**

و يرمز عادة للمشتقة الثانية($\frac{d^2y}{dx^2}$, $\bar{\bar{y}}$, $\bar{\bar{f}}(x)$),

وبالمثل تعرف المشتقة الثالثة بأنها مشتقة المشتقة الثانية و هكذا.

$$y = X^5 + 3X^2 - 2X + 1$$

$$\grave{y} = 5X^4 + 6X - 2$$

$$\grave{\grave{y}} = 20X^3 + 6$$

$$\grave{\grave{\grave{y}}} = 60X^2$$