Department: Statistics & Informatics
Stage: Second
Subject: Matrices
2022–2023
Lecturer Kawther Saeed Taha

Chapter four // The Determinant المحدد

The Determinant of square matrix المحددة للمصفوفة المربعة :

The Determinant is the sum of signed products of elements (one from each row and column) in square matrix.

المحددة لمصفوفة A من درجة n له قيمة غير متجهة وهي المجموع الجبري لكل حواصل الضرب الممكنة لعدد n من العناصر والتي تحتوي على عنصر واحد فقط من كل صف وعمود كل حد من هذا المجموع إما سالب أو موجب.

وترمز له بالرمز $|A|$ أو det (A) .

1- The Determinant of matrix for size (2×2)المحددة لمصفوفة من درجة ثانية :

يمكن ايجاد محددة المصفوفة من درجة ثانية (2×2) بضرب عناصر القطر الرئيسي ناقصاً حاصل ضرب عناصر القطر الثانوي.

دەتوانین (Determinant) بۆ ڕیزکراوە ی قەبارە (2×2) بدۆزینەوە بە لێکدانی ئیلیمێنتی چەقی سەرەکی وە لێدەرکردنی لە ئەنجامی لێکدانی ئیلیمێنتی چەقی لاوەکی. وەك بەم شێوەیەی خوارەوە:

Let $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ then:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$=(a_{11}*a_{22})-(a_{12}*a_{21})$$

Ex: Let $A=\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$ find the Determinant of A.

Solution:

$$|A|=\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix}$$
$$=(6*8)-(3*-1)$$
$$=48+3$$
$$=51$$

Ex: Let $B=\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ find the Determinant of B.

Solution:

$$|B| = \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (-2*3) - (-4*5)$$
$$= -6 + 20$$
$$= 14$$

Ex: Let $C = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ find the Determinant of C.

Ex: Find x if $\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

Solution:

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$
$$3 - x^2 = 3 - 8$$
$$x^2 = 8 - 3 + 3$$
$$x^2 = 8$$
$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

Ex: Evaluate $\begin{vmatrix} x-1 & x+1 \\ x^2 - x + 1 & x^2 + x + 1 \end{vmatrix}$

Solution:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x+1 \\ x^2 - x + 1 & x^2 + x + 1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2 + x + 1) - (x+1)(x^2 - x + 1)$$
$$= x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 - (x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1)$$
$$= x^3 - 1 - x^3 - 1$$
$$= -2$$

2- The Determinant of matrix for size (3×3)المحددة لمصفوفة من الدرجة الثالثة :

يمكن ايجاد قيمة المحددة لمصفوفة من درجة الثالثة (3×3) بطريقتيين:

a) **Arrows method** (سيروس) (طريقة فرق الاقطار)طريقة الاسهم **:**

أفرض أن A مصفوفة من درجة 3 يمكن استخدام القاعدة التالية لحساب المحدد:

- يعاد كتابة العمود الاول والثاني بعد العمود الثالث على التوالي فيكون:

- وای دابنێ كه A ڕیزكراوەیەكە بە قەبارەی 3 بۆ دۆزینەوەی نرخیDeterminant ئەوا دوو ستونی یەكەم لە ڕیزكراوەكە لە تەنیشت ستوونی سێیەم دادەنێین وەك:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|\mathrm{A}|=\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

- وبعد ذلك يتم تكوين ثلاثة اسهم بنفس الاتجاه وثلاث اسهم أخرى باتجاه معاكس ثم يتم طرح حاصل ضرب السهمين. أي أن:

- پاشان لە لای چەپەوە سێ تیر بە هەمان ئاڕاستە وە سێ تیری تر بە ئاڕاستەی پێچەوانە دروست دەكەین دوایی ئەنجامی لێكدانی هەردووئاڕاستەكە لە یەكتر دەردەكەین. وەك:

$$|\mathrm{A}|=(a_{11}*a_{22}*a_{33})+(a_{12}*a_{23}*a_{31})+(a_{13}*a_{21}*a_{32})-[(a_{12}*a_{21}*a_{33})+(a_{11}*a_{23}*a_{32})+(a_{13}*a_{22}*a_{31})]$$

Ex: Let $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ find the determinant of A used arrows way.

Solution:

$$|\mathrm{A}|=\left|\begin{matrix} 3 & 1 & 0 & \vdots & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & \vdots & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 & 2 \end{matrix}\right.$$

$$\begin{aligned} &=(3*2*1)+(1*4*3)+(0*-1*2)-[(1*-1*1)+(3*4*2)+(0*2*3)] \\ &=6+12+0-(-1+24+0) \\ &=18-23 \\ &=-5 \end{aligned}$$

Ex: Let $B=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ find the determinant of B used arrows method.

Solution:

$$|\mathrm{A}|=\left|\begin{matrix} -2 & 3 & 1 & \vdots & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 2 \\ -4 & 1 & -3 & \vdots & -4 & 1 \end{matrix}\right.$$

$$=(-2*2*-3)+(3*-1*-4)+(1*0*1)-[(3*0*-3)+(-2*-1*1)+(1*2*-4)]$$

b) <u>Elements of row (column) method</u> **طريقة عناصر الصف أو العمود**

يمكن حساب أي محدد من درجة ثالثة بضرب عناصر الصف الاول أو أي صف آخر في محددات من درجة ثانية الناتجة عن حذف الصف والعمود الذي يقع منها العنصر مع ملاحظة الاشارة.

أو ضرب عناصر العمود الاول أو أي عمود آخر في محددات من درجة ثانية الناتجة عن حذف الصف والعمود الذي يقع منها العنصر مع ملاحظة الاشارة.

ملاحظة//

- إشارات الصف الاول $+ \quad - \quad +$
- إشارات الصف الثاني $- \quad + \quad -$
- إشارات الصف الثالث $+ \quad - \quad +$

Ex: Let $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ find the determinant of A by used elements of row or column method.

<u>Solution:</u>

1) نختار الصف الاول
2) $(+ \quad - \quad +)$ إشارات الصف الاول

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(2-8) - 1(-1-12) + 0(-2-6)$$

$$= 3(-6) - 1(-13) + 0$$

$$= -18 + 13$$

$$= -5$$

Ex: Let $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 5 \\ 4 & 11 & 9 \end{bmatrix}$ find the determinant of B by used elements of row or column method.

<u>Solution:</u>

1) نختار العمود الثاني
2) $(- \quad + \quad -)$ إشارات العمود الثاني

$$|B| = -b_{12}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{22}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{32}\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} - 11\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -3(18-20) + 6(9-8) - 11(5-4)$$

$$= -3(-2) + 6(1) - 11(1)$$

$$= 6 + 6 - 11$$

$$= 1$$

The properties of Determinant:

1) If all elements of A is zero then $|A|=0$, $A=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix} \to |A|=0-0=0$

2) $|A'|=|A|$,

$$Ex: \quad A=\begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 4\end{bmatrix} \to |A|=8+3=11$$

$$A'=\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & 4\end{bmatrix} \to |A'|=8+3=11$$

3) If there exists two rows or(two column) of square matrix A are equal , then $|A|=0$

- إذا تشابه صفان (عمودان) في المصفوفة المربعة A فيكون $|A|=0$

$$\text{Ex: } Let \;\; A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\1 & 6 & 1\\3 & 5 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=0$$

$$\text{Ex: } A=\begin{bmatrix}-4 & 7 & -4\\1/7 & 0 & 1/7\\0 & 4 & 0\end{bmatrix} \to |A|=0$$

4) If all elements of one row or(column) in square matrix A is zero then $|A|=0$

$$\text{Ex: } A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\3 & 4 & 0\\2 & 5 & 0\end{bmatrix} \to |A|=0$$

$$\text{Ex: } A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\0 & 0 & 0\\2 & 5 & -2\end{bmatrix} \to |A|=0$$

5) If one roe or (column) in square matrix A is a multiple of another row or (column) , then $|A|=0$

- اذا كانت عناصر صف أو (عمود) ضعف عناصر صف أو (عمود) آخر في المصفوفة المربعة فإن المحدد يساوي صفر.

$$\text{Ex: } A=\begin{bmatrix}8 & 4 & -8\\1 & 0 & 1\\4 & 2 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(4) & 2(2) & 2(-4)\\1 & 0 & 1\\4 & 2 & -4\end{bmatrix} \to |A|=0$$

6) If A is a triangular matrix, then the determinant of a matrix A is an equal to the product of the elements of main diagonal.

- اذا كانت المصفوفة مصفوفة مثلث علوي أو سفلي فأن المحدد يساوي ضرب عناصر القطر الرئيسي فقط.

$$\text{Ex: } A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3\\0 & 3 & 4\\0 & 0 & -2\end{bmatrix} \to |A|=2*3*-2=-12$$

$$\text{Ex: } A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\2 & 4 & 0\\5 & 3 & 6\end{bmatrix} \to |A|=3*4*6=72$$

7) إذا ضربت أي صف (عمود) بثابت فإن قيمة المحددة تتغير بمقدار ذلك الثابت من المرات.

$$If \quad A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$then \ |A|=\begin{vmatrix} k\,a & kb \\ c & d \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Ex: $Let \quad A=\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ Then

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2(2) & 2(3) \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

$$36-18=2(18-9)$$

$$18=2(9)$$

$$18=18$$

8- إذا أستخرجت B من A بتبديل صفين (عمودين) متجاورين مع بعضهما فإن $|B|=-|A|$.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

$$|B|=\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}=bc-ad=-(ad-cb)$$

Ex: Let $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ show that |B| = -|A|

Solution:

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-5-6=-11$$

$$|B|=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=6-(-5)=6+5=11$$

$$|B|=-|A| \Rightarrow 11=-(-11) \Rightarrow 11=11$$

9- If A and B are square matrix then $|A.B| = |A| . |B|$
or $|A^2.B| = |A.A.B| = |A| . |A|. |B|$

Ex: Let $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} and \ B=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ show that 1) $|A.B| = |A| . |B|$ 2) $|A^2.B| = |A| . |A|. |B|$

<u>Solution:</u>

10- لاتتغير قيمة المحددة إذا ضربت عناصر صف (أو عمود) في مقدار ثابت k وأضيفت الى العناصر المناضرة من صف (أو عمود) اخر. أي إذا أنتجت مصفوفة B من مصفوفة A بضرب عناصر صف (أو عمود) في مقدار ثابت k وأضيفت الى العناصر المناضرة من صف (أو عمود). أي:

$$|A| = |B|$$

$$\text{Ex: Let } A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} a_{11}+ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=|B|$$

مثال: إذا كانت لديك مصفوفة A وإذا حصلنا على مصفوفة B بضرب عناصر العمود الاول في (3) وإضافته للعمود الثاني. فبرهن بإن |A| = |B|

$$\text{Ex: Let } A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} 3 & 3(3)-1 & 2 \\ 2 & 3(2)-2 & 3 \\ -1 & 3(-1)+1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

3- First Minor and Cofactor method المحيدد الاول والمرافق

المحددة من درجة (n-1) المستخرجة من مصفوفة A من درجة (n) بحذف صف واحد وعمود واحد (الصف رقم i والعمود رقم j) تسمى المحيدد (Minor) الاول للمصفوفة A. أو المحيدد الاول لمحددة A أو يسمى محيدد العنصر (a_{ij}) الناتج من تقاطع الصف والعمود المحذوفيين ويرمز له بالرمز $|M_{ij}|$ حيث M_{ij} هو مصفوفة جزئية من A. المحيدد الذي يحمل إشارة $(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ يسمى مرافق(Cofactor) العنصر a_{ij} ويرمز له بالرمز α_{ij}، بحيث أن:

$$\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

$$\underline{\textit{Ex:}}\text{ If } A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\text{then}$$

The Minor(محيدد) of a_{11} is: $|M_{11}|=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ = $a_{22}.a_{33} - a_{23}.a_{32}$

The Minor of a_{12} is: $|M_{12}|=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$= $a_{21}.a_{33} - a_{23}.a_{31}$

The Minor of a_{13} is: $|M_{13}|=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$= $a_{21}.a_{32} - a_{22}.a_{31}$

The Minor of a_{21} is: $|M_{21}|=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ = $a_{12}.a_{33} - a_{13}.a_{32}$

The Minor of a_{22} is: $|M_{22}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$= $a_{11}.a_{33} - a_{13}.a_{31}$

The Minor of a_{23} is: $|M_{23}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$= $a_{11}.a_{32} - a_{12}.a_{31}$

The Minor of a_{31} is: $|M_{31}|=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$= $a_{12}.a_{23} - a_{13}.a_{22}$

The Minor of a_{32} is: $|M_{32}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}$ = $a_{11}.a_{23} - a_{13}.a_{12}$

The Minor of a_{33} is: $|M_{33}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

The cofactor(مرافق) for a_{11} is: $\alpha_{11}=(-1)^{1+1}\,|M_{11}| =(-1)^2\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ = $a_{22}.a_{33}$ - $a_{23}.a_{32}$

The cofactor for a_{12} is: $\alpha_{12}=(-1)^{1+2}\,|M_{12}| =(-1)^3\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ = - ($a_{21}.a_{33}$ - $a_{23}.a_{31}$)

The cofactor for a_{13} is: $\alpha_{13}=(-1)^{1+3}\,|M_{13}| =(-1)^4\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ = -($a_{21}.a_{32}$ - $a_{22}.a_{31}$)

The cofactor for a_{21} is: $\alpha_{21}=(-1)^{1+2}\,|M_{21}|=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ = $a_{12}.a_{33} - a_{13}.a_{32}$

The cofactor of a_{22} is: $\alpha_{22}=(-1)^{2+2}\,|M_{22}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ = $a_{11}.a_{33} - a_{13}.a_{31}$

The cofactor of a_{23} is: $\alpha_{23}=(-1)^{2+3}\,|M_{23}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ = -($a_{11}.a_{32} - a_{12}.a_{31}$)

The cofactor of a_{31} is: $\alpha_{31}=(-1)^{3+1}\,|M_{31}|=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ = $a_{12}.a_{23} - a_{13}.a_{22}$

The cofactor of a_{32} is: $\alpha_{32}=(-1)^{3+2}\,|M_{32}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{12} & a_{23} \end{vmatrix}$ = -($a_{11}.a_{23} - a_{13}.a_{12}$)

The cofactor for a_{33} is: $\alpha_{33}=(-1)^{3+3}\,|M_{33}| =(-1)^6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ = $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

<u>Then the determinant of A is:</u>

by used row number one the determinant is:

$$|A|=a_{11}\,|M_{11}|-a_{12}\,|M_{12}|+a_{13}\,|M_{13}| \qquad \Rightarrow \textbf{Using } \text{Minor.}$$

$$|A|=a_{11}\,\alpha_{11}+\,a_{12}\,\alpha_{12}+a_{13}\,\alpha_{13}\,=\sum_{k=1}^{3}a_{kj}\,\alpha_{kj} \qquad \Rightarrow \textbf{Using } \text{Cofactor.}$$

أي أن المحددة الى **A** عبارة عن مجموع حاصل ضرب العناصر للصف الاول في مرافقات نفس الصف.

ملاحظة// يمكن أستخدام عناصر أي صف لفك المحددة أوعناصر أي عمود فيكون:

$$|A|=\sum_{k=1}^{3}a_{ik}\,\alpha_{ik}\,=\,\sum_{k=1}^{3}a_{kj}\,\alpha_{kj}$$

ex: Find the Minor and the cofactor for all elements of A if $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 4\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ and find $|A|$

Solution:

Minor Cofactor

$$\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

$$|M_{11}|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=6-8=-2 \quad\Rightarrow\quad \alpha_{11}=(-1)^{1+1}|M_{11}|=(-1)^2(-2)=-2$$

$$|M_{12}|=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & 3\end{vmatrix}=9+4=13 \quad\Rightarrow\quad \alpha_{12}=(-1)^{1+2}|M_{12}|=(-1)^3(13)=-13$$

$$|M_{13}|=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 2\end{vmatrix}=6+2=8 \quad\Rightarrow\quad \alpha_{13}=(-1)^{1+3}|M_{13}|=(-1)^4(8)=8$$

$$|M_{21}|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3+4=7 \quad\Rightarrow\quad \alpha_{21}=(-1)^{2+1}|M_{21}|=(-1)^3(7)=-7$$

$$|M_{22}|=\begin{vmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{vmatrix}=6-2=4 \quad\Rightarrow\quad \alpha_{22}=(-1)^{2+2}|M_{22}|=(-1)^4(4)=4$$

$$|M_{23}|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4+1=5 \quad\Rightarrow\quad \alpha_{23}=(-1)^{2+3}|M_{23}|=(-1)^5(5)=-5$$

$$|M_{31}|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4+4=8 \quad\Rightarrow\quad \alpha_{31}=(-1)^{3+1}|M_{31}|=(-1)^4(8)=8$$

$$|M_{32}|=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=8+6=14 \quad\Rightarrow\quad \alpha_{32}=(-1)^{3+2}|M_{32}|=(-1)^5(14)=-14$$

$$|M_{33}|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4-3=1 \quad\Rightarrow\quad \alpha_{33}=(-1)^{3+3}|M_{33}|=(-1)^6(1)=1$$

نختار العمود الاول

$$\begin{aligned}|A|&=a_{11}|M_{11}|-a_{21}|M_{21}|+a_{31}|M_{31}|\\ &=2(-2)-3(7)+(-1)(8)\\ &=-4-21-8\\ &=-33\end{aligned}$$

or $$\begin{aligned}|A|&=a_{11}\alpha_{11}+a_{21}\alpha_{21}+a_{31}\alpha_{31}\\ &=2(-2)+3(-7)+(-1)(8)\\ &=-4-21-8\\ &=-33\end{aligned}$$

4-The Determinant of matrix more than size (3)المحدد للمصفوفة أكثرمن درجة ثالثة :

المحدد لمصفوفة أكثرمن درجة الثالثة (طريقة المحيد الاول والمرافق)، إذا كانت A من درجة n فإنه يمكن استخدام أي صف أو أي عمود لفك المحددة كالآتي:

1) باستخدام عناصر الصف رقم i $$|A|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\,\alpha_{ik}$$

2) باستخدام عناصر العمود رقم j $$|A|=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}\,\alpha_{kj}$$

ex: Find the Determinant of B if $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ by used the elements of row two.

<u>Solution:</u>

$$|B| = b_{21}\,\alpha_{21} + b_{22}\,\alpha_{22} + b_{23}\,\alpha_{23} + b_{24}\,\alpha_{24}$$

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & \vdots & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 3 & \vdots & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & \vdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -[24 - 9 - 4 - (-18 + 6 - 8)] = -31$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & \vdots & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 3 & \vdots & -3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & \vdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 12 + 18 - 6 - (-27 + 3 + 16) = 32$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \vdots & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 & \vdots & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & \vdots & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -[-6 + 12 + 6 - (-18 - 3 - 8)] = -41$$

$$\alpha_{24} = (-1)^{2+4}|M_{24}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & \vdots & -3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 + 16 + 9 - (-6 - 4 - 12) = 45$$

$$|B| = -2(-31) + 3(32) + 0(-41) + 2(45)$$

$$= 62 + 96 + 0 + 90$$

$$= 248$$

<u>5-Determinant by using Laplace Expansion method طريقة لابلاس لايجاد المحدد:</u>

في طريقة لابلاس لايجاد المحدد بدلاً من حذف صف واحد وعمود واحد واستخدام طريقة المحيددات الأولى والمرافقات يمكن حذف أكثر من صف و أكثر من عمود من الصفوف و الأعمدة .

Let A be a square matrix for size ($m \times n$) then the Determinant of A by using Laplace method is:

$$|A| = \sum_{p} (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_m+j_1+j_2+\cdots+j_m} \left| A \begin{smallmatrix} j_1, j_2, \cdots, j_m \\ i_1, i_2, \cdots, i_m \end{smallmatrix} \right| * \left| A \begin{smallmatrix} j_{m+1}, j_{m+2}, \cdots, j_n \\ i_{m+1}, i_{m+2}, \cdots, i_n \end{smallmatrix} \right|$$

$$when\ \ p = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m}$$

ملاحظة: تأخذ الصفوف المحذوفة بشكل تسلسل طبيعي 1,2,…,m أما الأعمدة فتؤخذ بشكل اختيار $j_1, j_2, \ldots, j_m$

Let $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ then the Determinant of A by using Laplace method is:

$$|A|=(-1)^{\overbrace{1+2}^{row}+\overbrace{1+2}^{column}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^{\overbrace{1+2}^{row}+\overbrace{1+3}^{column}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^{\overbrace{1+2}^{row}+\overbrace{1+4}^{column}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{\overbrace{1+2}^{row}+\overbrace{2+3}^{column}}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^{\overbrace{1+2}^{row}+\overbrace{2+4}^{column}}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}+(-1)^{\overbrace{1+2}^{row}+\overbrace{3+4}^{column}}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

Ex: Find the determinant of A if $A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 & 5 \\ -3 & 6 & 9 & -1 \\ 8 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ by using Laplace method.

Solution:

افضل عدد يؤخذ للحذف من الصفوف هو الصف الاول و الثاني($i_1 , i_2 = 1,2$) أما الأعمدة فتأخذ شكل اختيار (j_1 , j_2) و الاختبارات الممكنة المختلفة هي:

$j_1 , j_2 = (1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$

لذا فإن المحدد الى A تساوي

$$|A|=(-1)^{\overbrace{1+2}^{row}+\overbrace{1+2}^{col}}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=(15+8)(-18)-(-10-4)(-12+1)+(25)(-9)+(4-3)(6+8)-(-10)(-72)+(5)(-3-48)$$

$$=23(-18)+(-14)(11)-225+14-720+5(-51)$$

$$=-414-154-225+14-720-255$$

$$=-1754$$

يمكن اختيار صفوف أخرى مثل الصف الثالث والرابع ($i_1 , i_2 = 3,4$) أما الأعمدة فتأخذ شكل اختيار (j_1 , j_2) و الاختبارات الممكنة المختلفة هي:

$j_1 , j_2 = (1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$

$$|A|=(-1)^{\overbrace{3+4}^{row}+\overbrace{1+2}^{col}}\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}+(-1)^{3+4+1+3}\begin{vmatrix} -3 & 9 \\ 8 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}+(-1)^{3+4+1+4}\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}+$$

$$(-1)^{3+4+2+3}\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}+(-1)^{3+4+2+4}\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}+(-1)^{3+4+3+4}\begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=(-3-48)(5)-(-72)(-10)+(6+8)(4-3)+(-9)(25)-(-12+1)(-10-4)+(-18)(15+8)$$

$$=-51(5)-720-225+14-225+154-414$$

$$=-1754$$

ملاحظة// بدلاً من اختيار الصفوف يمكن اختيار الأعمدة مثل العمود الأول و الثاني ($j_1, j_2=1,2$) أما الصفوف فتأخذ شكل اختيار (i_1, i_2) و الاختبارات الممكنة المختلفة هي:

$i_1, i_2=(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$

$$|A|=(-1)^{\overbrace{1+2}^{col}+\overbrace{1+2}^{row}}\begin{vmatrix}5&-2\\4&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}9&-1\\0&-2\end{vmatrix}+(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix}5&-2\\-3&6\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-2&5\\0&-2\end{vmatrix}+(-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix}5&-2\\8&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-2&5\\9&-1\end{vmatrix}+$$
$$(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix}4&3\\-3&6\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&-2\end{vmatrix}+(-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix}4&3\\8&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\9&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix}-3&6\\8&1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\-2&5\end{vmatrix}$$
$$=(15+8)(-18)-(30-6)(4)+(5+16)(2-45)+(24+9)(-2)-(4-24)(-1)+(-3-48)(5)$$
$$=-23(18)-96-903-66-20-255$$
$$=-1754$$

Ex: Find the determinant of B if $B=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&-1&0&5\\1&-1&3&0\\0&5&1&-1\end{bmatrix}$

Solution:

افضل عدد يؤخذ للحذف من الصفوف هو الصف الاول و الثاني($i_1, i_2=1,2$) أما الأعمدة فتأخذ شكل اختيار (j_1, j_2) و الاختبارات الممكنة المختلفة هي:

$j_1, j_2=(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$

$$|B|=(-1)^{\overbrace{1+2}^{row}+\overbrace{1+2}^{col}}\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3&0\\1&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1&0\\5&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2+1+4}\begin{vmatrix}1&0\\0&5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1&3\\5&1\end{vmatrix}+$$
$$(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix}2&0\\-1&0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix}2&0\\-1&5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}+(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix}0&0\\0&5\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&-1\\0&5\end{vmatrix}$$
$$=(-1)(3)-(0)(1)+(5)(-1-15)+(0)(1)-(10)(3)+(0)(5)$$
$$=-3+0-80+0-30+0$$
$$=-113$$

Ex: Find the determinant of C if $C=\begin{bmatrix}3&2&1\\4&-1&2\\-1&3&2\end{bmatrix}$

Solution:

افضل عدد يؤخذ للحذف من الصفوف هو الصف الاول و الثاني($i_1, i_2=1,2$) أما الأعمدة فتأخذ شكل اختيار (j_1, j_2) و الاختبارات الممكنة المختلفة هي:

$j_1, j_2=(1,2),(1,3),\ (2,3)$

لذا فإن المحدد الى C تساوي

$$|C|=(-1)^{\overbrace{1+2}^{row}+\overbrace{1+2}^{col}}\begin{vmatrix}3&2\\4&-1\end{vmatrix}|2|+(-1)^{1+2+1+3}\begin{vmatrix}3&1\\4&2\end{vmatrix}|3|+(-1)^{1+2+2+3}\begin{vmatrix}2&1\\-1&2\end{vmatrix}|-1|$$
$$=(-3-8)(2)-(6-4)(3)+(4+1)(-1)$$
$$=-22-6-5$$
$$=-33$$

Chapter 5 // The Adjoint of a square matrix and inverse of matrix

The Adjoint of a square matrix المرافقة الثنائية للمصفوفة المربعة:

If $A=(a_{ij})$ be a matrix of order n (α_{ij}) be cofactor of (a_{ij}) in A then transpose of matrix of cofactor of elements of A is called adjoint of matrix A and denoted by adj(A).

هي المبدلة لمصفوفة مرافقات عناصر المصفوفة A ويرمز لها بالرمز $(adj(A))$. أي أن إذا كانت $A=(a_{ij})$ من درجة n فإن:

$$adjA=((\alpha_{ij}))'=((\alpha_{ji}))$$

where $\alpha_{ij} =(-1)^{i+j}|M_{ij}|$ حيث α_{ij} هو مرافقة العنصر a_{ij} . أي:

Ex: Find the adjoint of A or find adj (A).

If $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ then adj(A) = $=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}'=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$

$$\alpha_{ij} =(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$
$$\alpha_{11} =(-1)^{1+1}|a_{22}|=(-1)^2 (a_{22})=a_{22}$$
$$\alpha_{12} =(-1)^{1+2}|a_{21}|=(-1)^3 (a_{21})=-a_{21}$$
$$\alpha_{21} =(-1)^{2+1}|a_{12}|=(-1)^3 (a_{12})=-a_{12}$$
$$\alpha_{22} =(-1)^{2+2}|a_{11}|=(-1)^4 (a_{11})=a_{11}$$
$$\therefore adjA=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}'=\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ملاحظة// نحصل على(adj A) من درجة ثانية (2×2) بتبديل عناصر القطر الرئيسي مع بعضها وبعد ذلك نغير إشارات عناصر القطر الثانوي فقط.

Ex: Find the adjoint of A, if $A=\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

Solution:

$$\alpha_{ij} =(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$
$$\alpha_{11} =(-1)^{1+1}|0|=(-1)^2 (0)=0$$
$$\alpha_{12} =(-1)^{1+2}|-2|=(-1)^3 (-2)=2$$
$$\alpha_{21} =(-1)^{2+1}|5|=(-1)^3 (5)=-5$$
$$\alpha_{22} =(-1)^{2+2}|-4|=(-1)^4 (-4)=-4$$
$$\therefore adj(A)=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}'=\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Ex: Find the adjoint of B, if $B=\begin{bmatrix}5 & 2 & -1\\ 4 & 3 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}$

Solution:

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix} = (-1)^2(-3-4) = -7$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ -2 & -1\end{vmatrix} = (-1)^3(-4+4) = 0$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 3\\ -2 & 2\end{vmatrix} = (-1)^4(8+6) = 14$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix} = (-1)^3(-2+2) = 0$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}5 & -1\\ -2 & -1\end{vmatrix} = (-1)^4(-5-2) = -7$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}5 & 2\\ -2 & 2\end{vmatrix} = (-1)^5(10+4) = -14$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix} = (-1)^4(4+3) = 7$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}5 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix} = (-1)^5(10+4) = -14$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix} = (-1)^6(15-8) = 7$$

$$\therefore adj(B) = \begin{bmatrix}-7 & 0 & 14\\ 0 & -7 & -14\\ 7 & -14 & 7\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}-7 & 0 & 7\\ 0 & -7 & -14\\ 14 & -14 & 7\end{bmatrix}$$

Ex: Find the adjoint of C, if $C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & 0 & 3\\ 1 & -3 & 3 & 1\\ -2 & 3 & 1 & 0\end{bmatrix}$

The properties of adjoint of matrix:

Let A , B be matrix for size (n) and α is constant then:

1- $adj(A.B) = adj\,B\,.adjA$

2- $|adjA| = |A|^{n-1}$, $if\ |A| \neq 0$

3- $adj\,(adjA) = |A|^{n-2}.A$, $if\ |A| \neq 0$

4- $adj(\alpha\,A) = \alpha^{n-1}\,adjA$

5- $adj(A') = (adjA)'$

6- $adj(\overline{A}) = \overline{(adjA)}$

7- $adj(A^{*}) = (adjA)^{*}$

8- $adj(A^{-1}) = (adjA)^{-1}$

9- $adj(A^{p}) = (adjA)^{p}$

10- If A is symmetric matrix then $(adjA)$ is symmetric matrix.

11- If A is skew symmetric matrix for size odds then $(adjA)$ is symmetric matrix. and if A for size events then $(adjA)$ is skew symmetric matrix

12- If A is hermitian matrix then $(adjA)$ is hermitian matrix.

The Inverse of matrix معكوس المصفوقة :

Let A , B two matrix for size (n) and $|A| \neq 0$ if $AB = BA = I$ then B is inverse matrix of A , if and only if $|A| \neq 0$, Then $B=A^{-1}$, and A is inverse matrix of B, Then $A=B^{-1}$. Then:

$$AA^{-1} = BB^{-1} = I$$

يكون للمصغوفة المربعة معكوسة إذا وفقط إذا كانت قيمة المحددة لاتساوي صفراً. أي $|A| \neq 0$

هەر ڕیزکراوەیەکی چوارگۆشە پێچەوانەی هەیە ئەگەر وە تەنها ئەگەر نرخي (det) یەکسان نەبێت بە صفر. واتە $|A| \neq 0$

Ex: If $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ is $AB = BA = I$? But $A = B^{-1}$ *and* $B = A^{-1}$

Solution:

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = B^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A.B = B.A = I_2$$

Ex: If $A=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ *and* $B=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$ is $AB=BA=I$?

Solution:

$$A.B=B.A$$

$$\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}6-5 & 15-15\\ -2+2 & -5+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-5 & -10+10\\ -3+3 & -5+6\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$I_2=I_2$$

$$\therefore A.B=B.A=I_2$$

The theorem of inverse:

Let A^{-1} and B^{-1} are inverse for each matrix A , B and α is constant then:

1- $(\alpha A)^{-1}=\frac{1}{\alpha}A^{-1}$

2- $(A^{-1})^{-1}=A$

3- $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

4- $(A')^{-1}=(A^{-1})'$

5- $(\overline{A})^{-1}=\overline{(A^{-1})}$

6- $(A^{*})^{-1}=(A^{-1})^{*}$

Ex: Let $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$ *and* $k=3$. Show that $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$?

Solution:

$$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$$

$$(3\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix})^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}^{-1}$$

$$(\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & -9\end{bmatrix})^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & 0\\ 0 & \frac{-1}{9}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & 0\\ 0 & \frac{-1}{9}\end{bmatrix}$$

The way to find Inverse of matrix :

1- The adjoint method:

Let A is square matrix for size (n) and $|A| \neq 0$ then:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{|A|}(adj(A)) \quad , \quad if\ |A| \neq 0$$

Ex: Find inverse of matrix A by using adjoint method $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$.

Solution:

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 35-(-6) = 35+6 = 41 \neq 0$$

$\therefore$ المعكوسة الى (A) موجودة وتساوي:

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}}{41}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{7}{41} & \frac{-3}{41} \\ \frac{2}{41} & \frac{5}{41} \end{bmatrix}$$

Ex: Find inverse of matrix B by using adjoint method $B = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}$.

Solution: We use column one to find determinant of matrix B. Then

$$|B| = 6\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6(-12-5) - 0 + 0 = 6(-17) = -102 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{adj(B)}{|B|}$$

$$adj(B) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1}|M_{11}| = (-1)^2\begin{vmatrix}4 & 1\\ 5 & -3\end{vmatrix} = -12-5 = -17$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2}|M_{12}| = (-1)^3\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & -3\end{vmatrix} = 0-0 = 0$$

$$\alpha_{13} = (-1)^{1+3}|M_{13}| = (-1)^4\begin{vmatrix}0 & 4\\ 0 & 5\end{vmatrix} = 0-0 = 0$$

$$\alpha_{21} = (-1)^{2+1}|M_{21}| = (-1)^3\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 5 & -3\end{vmatrix} = -(6-10) = 4$$

$$\alpha_{22} = (-1)^{2+2}|M_{22}| = (-1)^4\begin{vmatrix}6 & 2\\ 0 & -3\end{vmatrix} = -18-0 = -18$$

$$\alpha_{23} = (-1)^{2+3}|M_{23}| = (-1)^5\begin{vmatrix}6 & -2\\ 0 & 5\end{vmatrix} = -(30-0) = -30$$

$$\alpha_{31} = (-1)^{3+1}|M_{31}| = (-1)^4\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix} = -2-8 = -10$$

$$\alpha_{32} = (-1)^{3+2}|M_{32}| = (-1)^5\begin{vmatrix}6 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} = -(6-0) = -6$$

$$\alpha_{33} = (-1)^{3+3}|M_{33}| = (-1)^6\begin{vmatrix}6 & -2\\ 0 & 4\end{vmatrix} = 24+0 = 24$$

$$adj(B) = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32}\\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-17 & 4 & -10\\ 0 & -18 & -6\\ 0 & -30 & 24\end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{adj(B)}{|B|}$$

$$= \frac{-1}{102}\begin{bmatrix}-17 & 4 & -10\\ 0 & -18 & -6\\ 0 & -30 & 24\end{bmatrix}$$

Ex: Find inverse of matrix D by using adjoint method $D = \begin{bmatrix}2 & -2 & 3\\ 3 & 4 & -1\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}$.

<u>Solution:</u>

2- The inverse by partition method: المعكوسة بطريقة التجزئة

Let A is square matrix for size (n) and $|A| \neq 0$, and let A is partined by four partitions, then:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

حيث A_{11} مصفوفة جزئية مربعة محددتها لاتساوي صفر، فتكون A_{22} ايظاً مربعة.

And let B be inverse of matrix A and let B is partined by four partitions, then:

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

بحيث أن $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ لها نفس رتبة المصفوفة الجزئية $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ على الترتيب. المطلوب إيجاد $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ بدلالة $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ بحيث أن $AB = BA = I$ لأن $A^{-1} = B$

$$\because AB = BA = I$$

$$\therefore \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & o \\ o & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & o \\ o & I \end{bmatrix}$$

نحصل على معادلات الاربعة من المصفوفة الاعلاة:

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I \ ......(1)$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \ ......(2)$$

$$B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 ......(3)$$

$$B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I ......(4)$$

نحل المعادلات الاربعة ونحصل على المعادلات التالية:

$$\Sigma = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1} A_{12}$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} \Sigma^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}$$

$$B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} \Sigma^{-1}$$

$$B_{21} = -\Sigma^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}$$

$$B_{22} = \Sigma^{-1}$$

أي أن:

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} \Sigma^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} \Sigma^{-1} \\ -\Sigma^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & \Sigma^{-1} \end{bmatrix}$$

ملاحظة: لتطبيق المعكوسة بطريقة التجزئة:-

1- يجب أن تكون المصفوفة مربعة ومحددتها لا تساوي صفر ومجزأة الى أربعة أجزاء وتكون المصفوفتين الواقعتين على القطر الرئيسي الجزئية مربعة أي A_{11} و A_{22} مربعة.

2- مصفوفة B أيظاً مربعة ومجزأة الى أربعة أجزاء أي نفس تجزئة مصفوفة A .

Ex: Find the inverse of matrix A by using the partitioning method?

$$A=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

<u>Solution:</u>

<u>یەکەم</u> // دەبێت $|A|$ بدۆزینەوە بە هەر ڕێگایەك لە ڕێگاکان. بە هەڵبژاردنی ڕیزی ئاسۆیی سێیەم وەك:

$$|A|=0\,\alpha_{31}+0\,\alpha_{32}+3\,\alpha_{33}$$

$$=3\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3(-3+2)=-3\neq 0$$

<u>دووەم</u> // دەبێت ڕیزکراوەی A بکەین بە چوار بەش بە مەرجێك بەشی A_{11} چوارگۆشە بێت وە هەروەها $|A_{11}|\neq 0$.

وەك بەم شێوەیە:

$$A=\begin{bmatrix}-3 & \vdots & 2 & 1\\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots\\ -1 & \vdots & 1 & 5\\ 0 & \vdots & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}, \text{ and } |A_{11}|=|-3|=-3\neq 0$$

<u>سێیەم</u> // دەبێت یەکەم جار نرخی Σ^{-1} بدۆزینەوە کاتێك: $\Sigma=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ لێرەدا دەبێت نرخی A_{11}^{-1} بدۆزینەوە:

$$A_{11}^{-1}=\left[\frac{-1}{3}\right]$$

$$\Sigma=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}\left[\frac{-1}{3}\right]\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{14}{3}\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$|\Sigma|=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{14}{3}\\ 0 & 3\end{vmatrix}=1-0=1$$

$$adj(\Sigma)=\begin{bmatrix}3 & \frac{-14}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\Rightarrow \Sigma^{-1}=\frac{adj(\Sigma)}{|\Sigma|}=1\begin{bmatrix}3 & \frac{-14}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & \frac{-14}{3}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=B_{22}$$

<u>چوارەم</u> // دوای دۆزینەوەی نرخی B_{22} جا نرخی B_{12} وە B_{21} وە B_{11} یەك بەدوای یەك دەیاندۆزینەوە بەم شێوەیە:

$$B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} \Sigma^{-1}$$
$$= -\left[\tfrac{-1}{3}\right]\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & \frac{-14}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & \frac{-14}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix}$$

$$B_{21} = -\Sigma^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}$$
$$= -\begin{bmatrix}3 & \frac{-14}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 \\ 0\end{bmatrix}\left[\tfrac{-1}{3}\right] = \begin{bmatrix}3 \\ 0\end{bmatrix}\left[\tfrac{-1}{3}\right] = \begin{bmatrix}-1 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} \Sigma^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}$$
$$= \left[\tfrac{-1}{3}\right] + \left[\tfrac{-1}{3}\right]\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & \frac{-14}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 \\ 0\end{bmatrix}\left[\tfrac{-1}{3}\right] = \left[\tfrac{-1}{3}\right] + \left[\tfrac{-2}{3}\right] = \begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\ A^{-1} = B = \begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}-1 \\ 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3 & \frac{-14}{3} \\ 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & \frac{-14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Ex: Find the inverse of matrix A by using the partitioning way?

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

<u>Solution:</u>

<u>یەکەم</u> // دەبێت $|B|$ بدۆزینەوە بە هەر ڕێگایەك لە ڕێگاکان. بە هەلبژاردنی ڕیزی ئاسۆیی یەکەم وەك:

$$|A| = 1\alpha_{11} + 3\alpha_{12} + 3\alpha_{13}$$
$$= 1\begin{vmatrix}4 & 3 \\ 3 & 4\end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix}1 & 3 \\ 1 & 4\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}1 & 4 \\ 1 & 3\end{vmatrix} = 16 - 9 - 3(4-3) + 3(3-4)$$
$$= 7 - 3(1) + 3(-1) = 7 - 3 - 3 = 1 \neq 0$$

<u>دووەم</u> // دەبێت ڕیزکراوەی A بکەین بە چوار بەش بە مەرجێك بەشی A_{11} چوارگۆشە بێت وە هەروەها $|A_{11}| \neq 0$.
وەك بەم شێوەیە:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & \vdots & 3 \\ 1 & 4 & \vdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 1 & 3 & \vdots & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}, \text{ and } |A_{11}| = \begin{vmatrix}1 & 3 \\ 1 & 4\end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$$

<u>سێیەم</u> // دەبێت یەکەم جار نرخی Σ^{-1} بدۆزینەوە کاتێك: $\Sigma = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ لێرەدا دەبێت نرخی A_{11}^{-1} بدۆزینەوە:

$$adj(A_{11})=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow A_{11}^{-1}=\frac{adj}{|A_{11}|}=(1)\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Sigma = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$$=[4]-[1 \quad 3]\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}$$

$$=[4]-[4-3 \quad -3+3]\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}$$

$$=[4]-[1 \quad 0]\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}=[4]-[3]=[1]$$

$$\Sigma^{-1}=[1]=B_{22}$$

<u>**چوارەم**</u> **// دواى دۆزینەوەى نرخى B_{22} جا نرخى B_{12} وە B_{21} وە B_{11} یەك بەدواى یەك دەیاندۆزینەوە بەم شێوەیە:**

$$B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}\Sigma^{-1}$$

$$=-\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}[1]=-\begin{bmatrix}12-9\\ -3+3\end{bmatrix}[1]=-\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}[1]=\begin{bmatrix}-3\\ 0\end{bmatrix}$$

$$B_{21}=-\Sigma^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

$$=-[1][1 \quad 3]\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}=-[1 \quad 3]\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}=-[4-3 \quad -3+3]=[-1 \quad 0]$$

$$B_{11}=A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}\Sigma^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 3\end{bmatrix}[1][1 \quad 3]\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix}[1 \quad 3]\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 9\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12-9 & -9+9\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore \; A^{-1}=B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-3\\ 0\end{bmatrix}\\ [-1 \quad 0] & [1]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -3 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Ex: Find the inverse of matrix C by using the partitioning way?

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Solution:

<u>یەکەم</u> // دەبێت $|C|$ بدۆزینەوە بە هەر ڕێگایەك لە ڕێگاکان. بە هەلبژاردنی ڕیزی ئاسۆیی دووەم وەك:

$$|C|=-1\alpha_{21}+0\alpha_{22}-2\alpha_{23}+3\alpha_{24}$$

$$\alpha_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & \vdots & -2 & 0 \end{vmatrix}=-\left[-3+4+0-(-6+0+2)\right]=-5$$

$$\alpha_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & \vdots & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & \vdots & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & \vdots & 2 & -2 \end{vmatrix}=-[-9-2-4-(6+6-2)]=25$$

$$\alpha_{24}=(-1)^4\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & \vdots & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & \vdots & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & \vdots & 2 & -2 \end{vmatrix}=0+2+8-(0-6+4)]=12$$

$$\therefore |C|=-(-5)-2(25)+3(12)=-9\neq 0$$

<u>دووەم</u> // دەبێت ڕیزکراوەی C بکەین بە چوار بەش بە مەرجێك بەشی C_{11} چوارگۆشە بێت وە هەروەها $|C_{11}|\neq 0$.

وەك بەم شێوەیە:

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 1 & \vdots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & & -2 & 3 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ -2 & 1 & \vdots & 1 & -1 \\ 2 & -2 & & 0 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$|C_{11}|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1\neq 0$$

<u>سێیەم</u> // دەبێت یەکەم جار نرخی Σ^{-1} بدۆزینەوە کاتێك: $\Sigma=C_{22}-C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}$ لێرەدا دەبێت نرخی C_{11}^{-1} بدۆزینەوە:

$$|C_{11}|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1 \quad , \quad adj(C_{11})=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$C_{11}^{-1}=\frac{adj(C_{11})}{|C_{11}|}=1\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\Sigma=C_{22}-C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 5\\ -2 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-10 & 15\\ 12 & -22\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -16\\ -12 & 19\end{bmatrix}$$

$$|\Sigma|=\begin{vmatrix}11 & -16\\ -12 & 19\end{vmatrix}=209-192=17$$

$$adj(\Sigma)=\begin{bmatrix}19 & 16\\ 12 & 11\end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1}=\frac{adj(\Sigma)}{|\Sigma|}=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}19 & 16\\ 12 & 11\end{bmatrix}=B_{22}$$

ئەرك (واجب)/////

چوارەم // دوای دۆزینەوەی نرخی B_{22} جا نرخی B_{12} وە B_{21} وە B_{11} یەك بەدوای یەك بدۆزنەوە.

پاشان نرخەكان لە C^{-1} دابنێن.