The inverse by partition method: المعكوسة بطريقة التجزئة

Let A is square matrix for size (n) and $|A| \neq 0$, and let A is partined by four partitions, then:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

حيث A_{11} مصفوفة جزئية مربعة محددتها لاتساوي صفر، فتكون A_{22} ايظاً مربعة.

And let B be inverse of matrix A and let B is partined by four partitions, then:

$$A^{-1}=B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

بحيث أن $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ لها نفس رتبة المصفوفة الجزئية $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ على الترتيب. المطلوب إيجاد $B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22}$ بدلالة $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ بحيث أن $AB=BA=I$ لأن $A^{-1}=B$

$$\because AB=BA=I$$

$$\therefore \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & o \\ o & I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & o \\ o & I \end{bmatrix}$$

نحصل على معادلات الاربعة من المصفوفة الاعلاة:

$$A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}=I \;......(1)$$
$$A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}=0 \;......(2)$$
$$A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}= \;......(3)$$
$$A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}= \;......(4)$$

نحل المعادلات الاربعة ونحصل على المعادلات التالية:

$$\Sigma=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$
$$B_{11}=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{12}\Sigma^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$
$$B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}\Sigma^{-1}$$
$$B_{21}=-\Sigma^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}$$
$$B_{22}=\Sigma^{-1}$$

أي أن:

$$A^{-1}=B=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}A_{12}\Sigma^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}\Sigma^{-1} \\ -\Sigma^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & \Sigma^{-1} \end{bmatrix}$$

ملاحظة: لتطبيق المعكوسة بطريقة التجزئة:-

1- يجب أن تكون المصفوفة مربعة ومحددتها لا تساوي صفر ومجزأة الى أربعة أجزاء وتكون المصفوفتين الواقعتين على القطر الرئيسي الجزئية مربعة أي A_{11} و A_{22} مربعة.

2- مصفوفة B أيظاً مربعة ومجزأة الى أربعة أجزاء أي نفس تجزئة مصفوفة A .

Ex: Find the inverse of matrix A by using the partitioning way?

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Solution:

یەکەم // دەبێت $|A|$ بدۆزینەوە بە هەر ڕێگایەك لە ڕێگاكان. بە هەلبژاردنی ڕیزی ئاسۆیی سێیەم وەك:

$$|A| = 0\,\alpha_{31} + 0\,\alpha_{32} + 3\,\alpha_{33}$$

$$= 3\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3(-3+2) = -3 \neq 0$$

دووەم // دەبێت ڕیزکراوەی A بکەین بە چوار بەش بە مەرجێك بەشی A_{11} چوارگۆشە بێت وە هەروەها $|A_{11}| \neq 0$. وەك بەم شێوەیە:

$$A=\begin{bmatrix} -3 & \vdots & 2 & 1 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \vdots & 1 & 5 \\ 0 & \vdots & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \text{, and } |A_{11}| = |-3| = -3 \neq 0$$

سێیەم // دەبێت یەکەم جار نرخی Σ^{-1} بدۆزینەوە کاتێك: $\Sigma = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ لێرەدا دەبێت نرخی A_{11}^{-1} بدۆزینەوە:

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{-1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|\Sigma| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{14}{3} \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$$

$$adj(\Sigma) = \begin{bmatrix} 3 & \frac{-14}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \frac{adj(\Sigma)}{|\Sigma|} = 1\begin{bmatrix} 3 & \frac{-14}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{-14}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = B_{22}$$

چوارەم // دوای دۆزینەوەی نرخی B_{22} جا نرخی B_{12} وە B_{21} وە B_{11} یەك بەدوای یەك دەیاندۆزینەوە بەم شێوەیە:

$$B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} \Sigma^{-1}$$
$$= -\left[\tfrac{-1}{3}\right]\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & \tfrac{-14}{3} \\ 0 & \tfrac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tfrac{2}{3} & \tfrac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & \tfrac{-14}{3} \\ 0 & \tfrac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix}$$

$$B_{21} = -\Sigma^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}$$
$$= -\begin{bmatrix}3 & \tfrac{-14}{3} \\ 0 & \tfrac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 \\ 0\end{bmatrix}\left[\tfrac{-1}{3}\right] = \begin{bmatrix}3 \\ 0\end{bmatrix}\left[\tfrac{-1}{3}\right] = \begin{bmatrix}-1 \\ 0\end{bmatrix}$$

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1} A_{12} \Sigma^{-1} A_{21} A_{11}^{-1}$$
$$= \left[\tfrac{-1}{3}\right] - \left[\tfrac{-1}{3}\right]\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & \tfrac{-14}{3} \\ 0 & \tfrac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 \\ 0\end{bmatrix}\left[\tfrac{-1}{3}\right] = \left[\tfrac{-1}{3}\right] - \left[\tfrac{2}{3}\right] = \left[-1\right]$$

$$\therefore\ A^{-1} = B = \begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\left[-1\right] & \begin{bmatrix}2 & -3\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}-1 \\ 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3 & \tfrac{-14}{3} \\ 0 & \tfrac{1}{3}\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & \tfrac{-14}{3} \\ 0 & 0 & \tfrac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Ex: Find the inverse of matrix C by using the partitioning way?

$$C = \begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

Solution:

<u>یەکەم</u> // دەبێت $|C|$ بدۆزینەوە بە هەر ڕێگایەك لە ڕێگاکان. بە هەڵبژاردنی ڕیزی ئاسۆیی دووەم وەك:

$$|C| = -1\alpha_{21} + 0\alpha_{22} - 2\alpha_{23} + 3\alpha_{24}$$

$$\alpha_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & \vdots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -3 & \vdots & -2 & 0\end{vmatrix} = -\left[-3+4+0-(-6+0+2)\right] = -5$$

$$\alpha_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix}3 & 1 & -1 & \vdots & 3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & \vdots & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & \vdots & 2 & -2\end{vmatrix} = -[-9-2-4-(6+6-2)] = 25$$

$$\alpha_{24} = (-1)^4 \begin{vmatrix}3 & 1 & 2 & \vdots & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & \vdots & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & \vdots & 2 & -2\end{vmatrix} = 0+2+8-(0-6+4)] = 12$$

$$\therefore |C| = -(-5) - 2(25) + 3(12) = -9 \neq 0$$

دووەم // دەبێت ڕیزکراوەی C بکەین بە چوار بەش بە مەرجێك بەشی C_{11} چوارگۆشە بێت وە هەروەها $|C_{11}| \neq 0$.

وەك بەم شێوەیە:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & \vdots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & & -2 & 3 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \\ -2 & 1 & \vdots & 1 & -1 \\ 2 & -2 & & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$|C_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

سێیەم // دەبێت یەکەم جار نرخی Σ^{-1} بدۆزینەوە کاتێك: $\Sigma = C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}$ لێرەدا دەبێت نرخی C_{11}^{-1} بدۆزینەوە:

$$|C_{11}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad , \quad adj(C_{11}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{11}^{-1} = \frac{adj(C_{11})}{|C_{11}|} = 1\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -2 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10 & 15 \\ 12 & -22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -16 \\ -12 & 19 \end{bmatrix}$$

$$|\Sigma| = \begin{vmatrix} 11 & -16 \\ -12 & 19 \end{vmatrix} = 209 - 192 = 17$$

$$adj(\Sigma) = \begin{bmatrix} 19 & 16 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \Sigma^{-1} = \frac{adj(\Sigma)}{|\Sigma|} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 19 & 16 \\ 12 & 11 \end{bmatrix} = B_{22}$$

ئەرك (واجب)/////

چوارەم // دوای دۆزینەوەی نرخی B_{22} جا نرخی B_{12} وە B_{21} وە B_{11} یەك بەدوای یەك بدۆزنەوە.

پاشان نرخەکان لە C^{-1} دابنێن.