Stage: Second
Subject: Linear Algebra Application

2022-2023

Lecturer Kawther Saeed Taha

Chapter one

Linear Algebra:

Why do I need to study linear algebra for machine learning?

لماذا علينا ان نتعلم الجبر الخطي في تعلم الالة؟

- Linear algebra is the building block of machine learning and deep learning.
- A good understanding of linear algebra is essential for understanding and working with many machine learning algorithms.

Machine Learning

- الجبر الخطي هو البنية الاساسية في تعلم الآلة والتعلم العميق.
- إن الفهم الجيد للجبر الخطي ضروري لفهم كيفية عمل العديد من خوارزميات التعلم الآلي.

Why should we learn Linear Algebra?

لماذا علينا أن نتعلم الجبر الخطي؟

- Linear Algebra is a very fundamental area in mathematics, science and engineering.
- Linear algebra is a branch of mathematics that deals with linear equations and linear functions which are represented through matrices and vectors.

Scalar	Vector	Matrix
1	$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$

- الجبر الخطي هو المجال الأساسي في الرياضيات،العلوم،والهندسة.
- الجبر الخطي هو فرع من فروع الرياضيات الذي يتعامل مع المعادلات الخطية والدوال الخطية التي يتم تمثيلها من خلال المصفوفات والمتجهات.

Linear Algebra: is the mathematics of data (matrices and vectors) هو رياضيات البيانات

Linear equation: معادلة خطية

أي معادلة من صيغة $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=b$ حيث كل من a_1 , a_2 , ---, a_n و b ثابت و x_1 , x_2 , --- , x_n متغير ، تسمى معادلة خطية بمجاهيل عددها n .

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=b \quad \text{Linear equation}$$

a: Coefficients.
x:Variable.
b: constant.

شروط المعادلة الخطية:

1) الأس لجميع المتغيرات =1.
2) عدم وجود متغيرين أو أكثر مضروبات ببعض أو مقسومات.
3) عدم وجود أي متغيرداخل أقتران.

Ex:

$3x+2y=10 \Rightarrow$ Linear equation.

$4x^2+y=5 \Rightarrow$ Non- linear equation.

$\frac{x}{y}$, xy $\Rightarrow$ Non- linear equation.

Ex: Find the value of (x) and (y) if y= 2x+1

Solution: y = 2x+1

x	Y
1	3
2	5
3	7

Linear systems الانظمة الخطية:

إذا كان لدينا m من المعادلات من هذا النوع تسمى نظام من المعادلات الخطية (System Linear Equations) وتكتب كالآتي:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ويمكن كتابة هذا النظام بصيغة المصفوفات كالآتي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

أو بصيغة ابسط يمكن كتابة هذا النظام كالآتي:

$$A_{m\times n} * X_{n\times 1} = B_{m\times 1}$$

حيث أن :

A: هي مصفوفات معاملات المتغيرات **$(x_1 , x_2 , --- , x_n)$.**

B: هي مصفوفات الحدود المطلقة $(b_1 , b_2 , --- , b_n)$.

ملاحظة//

عندما تكون مصفوفة (B=0) تسمى المعادلات متجانسة (Homogeneous) و عندما تكون مصفوفة (B≠0) تسمى المعادلات غير متجانسة (Non - Homogeneous). ويمكن حل هذه المعادلات بعدة طرق.

Ex:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= 0 \quad \cdots 1 \\ 3x - 2y &= 3 \quad \cdots 2 \end{aligned}\right\} linear\ systems\ by\ two\ equation$$

Ex:

$$\left.\begin{aligned} 3x - y + 5z &= 5 \quad \cdots 1 \\ 2x + y - z &= 3 \quad \cdots 2 \\ x + y + z &= 1 \quad \cdots 3 \end{aligned}\right\} linear\ systems\ by\ three\ equation$$

الانظمة الخطية تنفسم حسب الحل الى:

1- System has no solution. نظام لا يملك حلاً
2- System has a unique solution. نظام يملك حل وحيد
3- System has infinitely solution. نظام يملك الكثير من الحلول الامتناهية

1) **<u>Substitution method (الأستبدال) طريقة التعويض:</u>**

<u>Ex1</u>: Solve these systems of the linear equations using Substitution method:

$$x - 3y = -3 \quad \cdots 1$$

$$2x + y = 8 \quad \cdots 2$$

<u>Solve:</u>

تێبینی// یەکێك لە هاوکێشەکان هەڵدەبژێرین بە مەرجێك هاوکۆڵکەی یەکێك لە کۆڕاوەکان دەبێت ($+1$) بێت ئینجا گۆڕاوێکیان بە پێی گۆڕاوەکەی تر دەدۆزینەوە، وەك:

$$x - 3y = -3$$

$$x = -3 + 3y \quad \ldots \; 3$$

$$by\,sub\;3\,in\,2$$

$$2x + y = 8$$

$$2(-3 + 3y) + y = 8$$

$$-6 + 6y + y = 8$$

$$7y = 8 + 6$$

$$7y = 14 \Rightarrow y = 2$$

$$by\,sub\;y\;in\,3$$

$$x = -3 + 3y$$

$$x = -3 + 3(2)$$

$$x = -3 + 6 \Rightarrow x = 3$$

This system has a unique solution.

<u>Ex2</u>: Solve these systems of the linear equations by using Substitution method:

$$x - 3y = -7 \quad \cdots 1$$

$$2x - 6y = 7 \quad \cdots 2$$

<u>Solve:</u>

تێبینی// یەکێك لە هاوکێشەکان هەڵدەبژێرین بە مەرجێك هاوکۆڵکەی یەکێك لە کۆڕاوەکان دەبێت ($+1$) بێت ئینجا گۆڕاوێکیان بە پێی گۆڕاوەکەی تر دەدۆزینەوە، وەك:

$$x - 3y = -7 \quad \cdots 1$$

$$x = -7 + 3y \quad \ldots \; 3$$

$$by\,sub\;3\,in\,2$$

$$2x - 6y = 7$$

$$2(-7 + 3y) - 6y = 7$$

$$-14 + 6y - 6y = 7$$

$$0 \neq 21$$

This system has no solution.

Ex3:Solve these systems of the linear equations by using Substitution method:

$$x+2y+3z=6 \quad \cdots 1$$
$$2x-3y+2z=14 \quad \cdots 2$$
$$3x+y-z=-2 \quad \cdots 3$$

Solve:

تێبینی// یەکێك لە هاوکێشەکان هەڵدەبژێرین بە مەرجێك هاوکۆڵکەی یەکێك لە گۆڕاوەکان دەبێت ($1+$) بێت ئینجا گۆڕاوێکیان بە پێی گۆڕاوەکەی تر دەدۆزینەوە، وەك:

$$x+2y+3z=6$$
$$x=6-2y-3z \quad \cdots 4$$
$$by\, sub\ 4\, in\, 2$$
$$2x-3y+2z=14$$
$$2(6-2y-3z)-3y+2z=14$$
$$12-12y-6z-3y+2z=14$$
$$-7y-4z=14-12$$
$$-7y-4z=2 \quad \cdots 5$$
$$by\, sub\ 4\ in\, 3$$
$$3(6-2y-3z)+y-z=-2$$
$$18-6y-9z+y-z=-2$$
$$-5y-10z=-20 \quad \}\div(-5)$$
$$y+2z=4$$
$$y=4-2z \quad \cdots 6$$

$$by\, sub\ 6\ in\, 5$$
$$-7y-4z=2$$
$$-7(4-2z)-4z=2$$
$$-28+14z-4z=2$$
$$10z=30 \quad \Rightarrow \quad z=3$$
$$by\, sub\ z\ in\, 6$$
$$y=4-2z \quad \cdots 6$$
$$y=4-2(3)$$
$$y=4-6 \ \Rightarrow \quad y=-2$$
$$by\, sub\, y\, and\ z\ in\, 4$$
$$x=6-2y-3z$$
$$x=6-2(-2)-3(3)$$
$$x=6+4-9 \quad \Rightarrow \quad x=1$$

This system has a unique solution.

Ex4: Solve these systems of the linear equations by using Substitution method:

$$2x\ -3y+z=5 \quad \cdots\ 1$$
$$6x\ -9y+3z=2 \quad \cdots\ 2$$
$$5x\ +4y-z=3 \quad \cdots\ 3$$

Solve:

تێبینی// یەکێك لە هاوکێشەکان هەڵدەبژێرین بە مەرجێك هاوکۆڵکەی یەکێك لە گۆڕاوەکان دەبێت ($1+$) بێت ئینجا گۆڕاوێکیان بە پێی گۆڕاوەکەی تر دەدۆزینەوە، وەك:

$$in1 \quad z=5-2x+3y \quad \cdots 4$$
$$by\, sub\ 4\, in\, 2$$
$$6x\ -9y+3(5-2x+3y)=2$$
$$6x\ -9y+15-6x+9y=2$$
$$0\neq 2$$

This system has no solution.

Ex5: Solve these systems of the linear equations by using Substitution method:

$$x+y=3 \qquad \cdots\ 1$$
$$2x-y=5 \qquad \cdots\ 2$$
$$3x+y=0 \qquad \cdots\ 3$$

Solve:

تێبینی// یەکێك لە هاوکێشەکان هەڵدەبژێرین بە مەرجێك هاوکۆڵکەی یەکێك لە کۆڕاوەکان دەبێت ($+1$) بێت ئینجا گۆڕاوێکیان بە پێی گۆڕاوەکەی تر دەدۆزینەوە، وەك:

$x+y=3 \quad \cdots\ 1$

$x=3-y \quad \ldots\ 4$

$by\ sub\ 4\ in\ 2$

$2x-y=5$

$2(3-y)-y=5$

$6-2y-y=5$

$-3y=-1 \quad \Rightarrow\ y=\frac{1}{3}$

$by\ sub\ 4\ in\ 3$

$3x+y=0$

$3(3-y)+y=0$

$9-3y+y=0$

$2y=9 \quad \Rightarrow\ y=\frac{9}{2}$

This system has no solution.

Ex6: Solve these systems of the linear equations by using Substitution method:

$$2x+3y=13 \qquad \cdots\ 1$$
$$x-2y=3 \qquad \cdots\ 2$$
$$5x+2y=27 \qquad \cdots\ 3$$

Solve:

$x-2y=3$

$x=3+2y \quad \ldots\ 4$

$by\ sub\ 4\ in\ 1$

$2x+3y=13$

$2(3+2y)+3y=13$

$6+4y+3y=13$

$7y=13-6$

$7y=7 \quad \Rightarrow \quad y=1$

$by\ sub\ 4\ in\ 3$

$5x+2y=27$

$5(3+2y)+2y=27$

$15+10y+2y=27$

$12y=27-15$

$12y=12 \quad \Rightarrow\ y=1$

$by\ sub\ y=1\ in\ 4$

$x=3+2y$

$x=3+2(1) \quad \Rightarrow\ x=5$

This system has a unique solution.

Ex7: Solve these systems of the linear equations by using Substitution method:

$$x + y - 2z = 5 \quad \cdots\ 1$$
$$2x + 3y + 4z = 2 \quad \cdots\ 2$$

Solve:

تێبینی// یەکێك لە هاوکێشەکان هەڵدەبژێرین بە مەرجێك هاوکۆڵکەی یەکێك لە کۆڕاوەکان دەبێت ($+1$) بێت ئینجا گۆڕاوێکیان بە پێی گۆڕاوەکەی تر دەدۆزینەوە، وەك:

$$in 1 \quad x = 5 - y + 2z \quad \cdots\ 3$$
$$by\ sub\ 3\ in\ 2$$
$$2x + 3y + 4z = 2$$
$$2(5 - y + 2z) + 3y + 4z = 2$$
$$10 - 2y + 4z + 3y + 4z = 2$$
$$y + 8z = 2 - 10$$
$$y = -8 - 8z \quad \cdots\ 4$$
$$by\ sub\ 4\ in\ 3$$
$$x = 5 - y + 2z$$
$$x = 5 - (-8 - 8z) + 2z$$
$$x = 5 + 8 + 8z + 2z$$
$$x = 13 + 10z$$
$$y = -8 - 8z$$

لێرەدا نرخی (z) دادەنێین جارێك بە (z=0) وە جارێکی تریش بە (z=1) وەك

$$if \quad z = 0 \quad then:$$
$$x = 13 + 10z \Rightarrow x = 13 + 10(0) = 13$$
$$y = -8 - 8z \Rightarrow y = -8 - 8(0) = -8$$
$$if \quad z = 1 \quad then:$$
$$x = 13 + 10z \Rightarrow x = 13 + 10(1) = 13 + 10 = 23$$
$$y = -8 - 8z \Rightarrow y = -8 - 8(1) = -8 - 8 = 16$$
$$then\ the\ z \in R\ this\ system\ has\ \text{infintely many}\ solution.$$

Ex(H.W): Solve these systems of the linear equations by using Substitution method:

$$\left.\begin{array}{ll} 2x + y - z = 6 & \cdots\ 1 \\ 2x - y + 2z = -8 & \cdots\ 2 \\ 3x - y + z = -7 & \cdots\ 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{array}$$

2) **Elimination method طريقة الأختزال:**

Ex1: Solve these systems of the linear equations by using Elimination method:

$$3x + 2y = 7 \qquad \cdots\ 1$$
$$5x - 3y = 37 \qquad \cdots\ 2$$

Solution:

$$(3x + 2y = 7) \times 3 \quad \Rightarrow \quad 9x + 6y = 21$$
$$(5x - 3y = 37) \times 2 \quad \Rightarrow + \quad \frac{10x - 6y = 74}{19x + 0 = 95}$$
$$x = 5$$
$$by\, sub\, x = 5\, in 1 \Rightarrow 3x + 2y = 7$$
$$3(5) + 2y = 7 \quad \Rightarrow 2y = 7 - 15$$
$$y = -4$$

This system has a unique solution.

Ex2: Solve these systems of the linear equations by using Elimination method:

$$2x - y = 3 \qquad \cdots\ 1$$
$$3x - 2y = 4 \qquad \cdots\ 2$$

Solution:

$$(2x - y = 3) \times -2 \quad \Rightarrow \quad -4x + 2y = -6$$
$$3x - 2y = 4 \qquad \Rightarrow + \quad \frac{3x - 2y = 4}{-x + 0 = -2}$$
$$x = 2$$
$$by\, sub\, x = 2\, in 1 \Rightarrow 2x - y = 3$$
$$2(2) - y = 3 \quad \Rightarrow y = 4 - 3$$
$$y = 1$$

This system has a unique solution.

Ex3: Solve these systems of the linear equations by using Elimination method:

$$x - 3y = -7 \qquad \cdots 1$$
$$2x - 6y = 7 \qquad \cdots 2$$

Solution:

$$(x - 3y = -7) \times -2 \quad \Rightarrow \quad -2x + 6y = 14$$
$$2x - 6y = 7 \qquad \Rightarrow + \quad \frac{2x - 6y = 7}{0 \neq 21}$$

This system has no solution.

3) Gramar method (طريقة گرامير) طريقة المحددات

Let:

$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad ....1 \quad) \times a_{22}$$
$$(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \quad .... 2 \quad) \times a_{12}$$

وبطرح المعادلة الاولى من الثانية:

$$\begin{array}{c} a_{11}\,a_{22}x_1 + a_{12}\,a_{22}x_2 = a_{22}\,b_1 \\ \mp a_{21}\,a_{12}x_1 \mp a_{22}\,a_{12}x_2 = \mp a_{12}\,b_2 \\ \hline (a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12})\,x_1 = a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{a_{22}\,b_1 - a_{12}\,b_2}{a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}}$$

بشرط ان يكون $a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12} \neq 0$

ويمكن كتابة الشكل الاعلى بشكل محددة من الدرجة الثانية:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

والبسط هو المحدد لنفس المصفوفة $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ويلاحظ ان المقام هو المحددة لمصفوفة معاملات المجاهيل (معاملات x_1) حذف منها العمود الاول المطلقة الحدود محلها وضع و (b_1 و b_2 .

ولاستخراج (x_2):

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

ملاحظة//

1- بشرط ان يكون المقام لا يساوي صفر.
2- يجب ان يكون مصفوفة **A** مربعة.
3- إذا كانت (A_i) مصفوفة الناتجة عن تعويض مصفوفة (**B**) عن عمود رقم (i) في مصفوفة **A** يكون:

$$X_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$

Ex: Let $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \; and \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

<u>*Then*</u>: $x_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} \quad \Rightarrow \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} \quad \Rightarrow \quad A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

<u>Ex1:</u> Solve the system of the linear equation by using Gramer method:

$$x_1 - 3x_2 = 5$$
$$-x_2 + x_3 = -1$$
$$6x_1 + 2x_3 = 0$$

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & \vdots & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 2 & \vdots & 6 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 18 + 0 - (0+0+0) = -20 \neq 0$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \quad |A_1| = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & \vdots & 5 & -3 \\ -1 & -1 & 1 & \vdots & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = -10 + 0 + 0 - (6+0+0) = -16$$

$$x_1 = \frac{-16}{-20} = \frac{4}{5}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & \vdots & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 2 & \vdots & 6 & 0 \end{vmatrix} = -2 + 30 + 0 - (0+0+0) = 28$$

$$x_2 = \frac{28}{-20} = \frac{-7}{5}$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|}, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & \vdots & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & \vdots & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & \vdots & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 0 - (0+0-30) = 48$$

$$x_3 = \frac{48}{-20} = \frac{-12}{5}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -7/5 \\ -12/5 \end{bmatrix}$$

Ex2: Solve these systems of the linear equations by using Gramer method:

1) $2x_1 - x_2 = 3$
$-x_1 + 3x_2 = 16$

2) $x_1 - x_2 + x_3 = 7$
$x_1 + x_2 - x_3 = -3$
$x_1 + x_2 + x_3 = 5$

3)Matrix method (Invers method): طريقة المصفوفات (معكوس المصفوفات)

يمكن استخدام المصفوفات لحل المعادلات الانية وهناك نوعين من نظم المعادلات الخطية:

1) المعادلات الخطية التي تكون مصفوفة المعاملات اي (A) مربعة.
2) المعادلات الخطية التي تكون مصفوفة المعاملات اي (A) غير مربعة (بطريقة التحويلات).

a) Liner equations if A is square matrix:

اذا كانت A مصفوفة مربعة غير صفرية أي بمعنى أخر $|A|\neq 0$ إذاً معكوسة مصفوفة A أي A^{-1} موجودة.

يمكن حل المعادلات AX=B بضرب الطرفين ب(A^{-1}) فيكون:

$$AX=B$$

$$A^{-1}AX=A^{-1}B$$

$$IX=A^{-1}B$$

$$X=A^{-1}B$$

Ex1: Solve this system of the linear equations by using Invers method:

$$x_1-3x_2=5$$

$$-x_2+x_3=-1$$

$$6x_1+2x_3=0$$

Solution:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 6 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -3 & 0 & \vdots & 1 & -3\\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 0 & -1\\ 6 & 0 & 2 & \vdots & 6 & 0\end{vmatrix}=-2-18+0-(0+0+0)=-20\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}\qquad , \qquad adj(A)=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32}\\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}\end{bmatrix}$$

$$\alpha_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

$$\alpha_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2 \qquad , \qquad \alpha_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}0 & 1\\ 6 & 2\end{vmatrix}=6$$

$$\alpha_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}0 & -1\\ 6 & 0\end{vmatrix}=6 \qquad , \qquad \alpha_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=6$$

$$\alpha_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1 & 0\\ 6 & 2\end{vmatrix}=2 \qquad , \qquad \alpha_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & -3\\ 6 & 0\end{vmatrix}=-18$$

$$\alpha_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}-3 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-3 \qquad , \qquad \alpha_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$$

$$\alpha_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=3$$

$$adj(A)=\begin{bmatrix}-2 & 6 & -3\\ 6 & 2 & -1\\ 6 & -18 & -1\end{bmatrix} \quad , \quad A^{-1}=\frac{-1}{20}\begin{bmatrix}-2 & 6 & -3\\ 6 & 2 & -1\\ 6 & -18 & -1\end{bmatrix}$$

$$\underline{X} = A^{-1}B$$

$$=\frac{-1}{20}\begin{bmatrix}-2 & 6 & -3\\ 6 & 2 & -1\\ 6 & -18 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ -1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{-1}{20}\begin{bmatrix}-10-6+0\\ 30-2+0\\ 30+18+0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{-1}{20}\begin{bmatrix}-16\\ 28\\ 48\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}16/20\\ -28/20\\ -48/20\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4/5\\ -7/5\\ -12/5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix}x_1 = 4/5\\ x_2 = -7/5\\ x_3 = -12/5\end{matrix}$$

__Ex2:__ Solve this system of the linear equations by using Invers method:

$$x_1 - x_2 + x = 7$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = -3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5$$

b) <u>Liner equations if A is non square matrix by used transformations methods(Gauss Jordan method):</u>

Note:(We study this way in chapter 2)

Elementary transformations and Equivalent matrices

العمليات الأولية و المصفوفات المتكافئة

1-Rank of matrix (رتبة المصفوفه):

إذا كانت A مصفوفة غير صفرية يقال ان A من رتبة r إذا كان على الاقل محيدد واحد من درجة r من A لايساوي صفر بينما كل المحيددات من درجة (r +1) اصفار (أي أن رتبة A هي درجة أكبر محيدد من A قيمته لا تساوي صفر). ويرمز له بالرمز rank(A) = r(A)

Ex1: Let $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ find rank(A)?

Solution:

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-5+5=0$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=20-0=20\neq 0$$

Then rank(A)=2

Ex2: Let $B=\begin{bmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ find rank(B)?

Solution:

$$|B|=\begin{vmatrix} -1 & 4 & 5 \\ 2 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$|B|=\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix}=8-8=0$$

$$|B|=\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-3-10=-13\neq 0$$

$$\therefore rank(B)=2$$

ملاحظة// هذه الطريقة لحساب رتبة المصفوفة تكون صعبة في بعض الاحيان وخاصة عندما تكون درجة A كبيرة وفي هذه الحالة يمكن استبدالها بطريقة ثانية وذلك باستخدام ما يسمى بالعمليات الاولية.

تێبینی// ئەم رێگایە گرانە بۆ دۆزینەوەی rank بۆ هەر ریزکراوەیەك بە تایبەتی کاتێك قەبارەی ریزکراوەکە گەورە بێت لەم کاتەدا دەتوانین بیگۆرینەوە بە رێگایەکی تر ئەویش رێگای کردارە سەرەتایەکانە.

2- Elementary transformations العمليات الأولية:

العمليات الأولية هي العملية التي إذا اجريت على أي مصفوفة لاتتغير من درجتها ولا من رتبتها وهناك ستة عمليات أولية ثلاثة منها صفية وثلاثة عمودية وهذه العمليات هي:

1- H_{ij} : (j) تبديل الصف رقم (i) بالصف رقم

2- K_{ij} : (j) تبديل العمود رقم (i) بالعمود رقم

3- $H_i(k)$: (k) ضرب الصف رقم (i) بالثابت

4- $K_i(k)$: (k) ضرب العمود رقم (i) بالثابت

5- $H_{ij}(k)$: إضافة للصف رقم (j) حاصل ضرب الصف رقم i في (k)

6- $K_{ij}(k)$: إضافة للعنود رقم (j) حاصل ضرب العمود رقم i في (k)

Note:

H: العملية في الصف

K: العملية في العمود

Ex: Let $A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ make the elementary transformations in all arranged way:

1) H_{12} 2) $K_3^{(-2)}$ 3) $H_{13}^{(4)}$ 4) $K_{21}^{(-3)}$

$$A=\begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_3(-2)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{13}(4)} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 9 & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{K_{21}(-3)} \begin{bmatrix} -6 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ -28 & 9 & 16 \end{bmatrix}$$

Ex: Let $B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ make the elementary transformations in all arranged way:

1) $\mathbf{H_{23}}$ **2) $\mathbf{K_3^{(2)}}$** **3) $\mathbf{H_{13}^{(4)}}$** **4) $\mathbf{K_{21}^{(-1)}}$** **5) $\mathbf{K_{32}^{(-2)}}$**

3- Equivalent Matrix المصفوفات المتكافئة:

يقال للمصفوفتين A و B انهما متكافئتان اذا كانت لهما نفس الدرجة ونفس الرتبة ويكتب: $A \sim B$

وهنالك نوعان:

a) مكافئة صفية Row Equivalent:

يقال أن مصفوفة B مكافئة صفية الى A اذا استخرجت مصفوفة B من A باجراء عمليات أولية صفية فقط.

b) عمودية Column Equivalent:

يقال أن مصفوفة B مكافئة عمودية الى A اذا استخرجت مصفوفة B من A باجراء عمليات أولية عمودية فقط.

يمكن حساب رتبة (Rank) أى مصفوفة بتحويلها باستخدام العمليات الاولية الى صيغة بسيطة يمكن معرفة رتبتها بسهولة. وهناك صيغتيين وهما الصيغة القمعية (Canonical Form) والصيغة الطبيعية (Normal Form).

a) Canonical Form الصيغة القمعية:

يمكن حساب رتبة مصفوفة غير صفرية بتحويلها الى شكل قمعي الذي يمكن حساب رتبة المصفوفة المساوية للعدد الصفوف غير الصفرية الموجودة في المصفوفة.

ملاحظة// في شكل القمعي فقط نعمل العمليات الاولية على الصفوف وليست على الاعمدة.

تێبینی// لە شێوەی (Canonical) تەنها کرداری سەرەتایی لەسەر ڕیزی ئاسۆیی دەکەین.

Ex1: Let $A=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 0 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix}$, find rank of A by used the canonical form transformations way?

Solution:

$$A=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 0 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix} \overset{H_1(\frac{-1}{2})}{\sim} \begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\\ 5 & 1\end{bmatrix} \overset{H_{13}(-5)}{\sim} \begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\\ 0 & 11\end{bmatrix} \overset{H_2(-1)}{\sim} \begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\\ 0 & 11\end{bmatrix}$$

$$\overset{H_{23}(-11)}{\sim} \begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \overset{H_{21}(2)}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = C$$

$Then\ rank(A)=2, the\ number\ of\ rows\ of\ C\ not\ all\ zeros.$

Ex2: Let $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 5 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$, find rank of A by used the canonical form transformations way?

Solution:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\\ 5 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix} \overset{H_{31}}{\sim} \begin{bmatrix}-2 & 0 & 2\\ 5 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \overset{H_1(\frac{-1}{2})}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 5 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix} \overset{H_{12}(-5)}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\overset{H_{23}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & -5\end{bmatrix} \overset{H_3(\frac{-1}{5})}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \overset{H_{31}(1)}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \overset{H_{32}(-4)}{\sim} \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = C$$

$Then\ rank(A)=3, the\ number\ of\ rows\ of\ C\ not\ all\ zeros.$

Ex4: Let $B=\begin{bmatrix}3 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -2\\ 4 & -3 & 5\end{bmatrix}$, find rank of B by used the canonical form transformations way?

Solution:

$$B=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 0 & 8\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix} \overset{H_{12}}{\sim} \begin{bmatrix}0 & 4 & 0 & 8\\ 0 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix} \overset{H_1(\frac{1}{4})}{\sim} \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\overset{H_{23}}{\sim} \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 3\end{bmatrix} \overset{H_2(-1)}{\sim} \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 3\end{bmatrix} \overset{H_{23}(2)}{\sim} \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\overset{H_3(-1)}{\sim} \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \overset{H_{31}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \overset{H_{32}(2)}{\sim} \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = C$$

$Then\, rank(A)=3, the\, number\, of\, rows\, of\, C\, not\, all\, zeros.$

Ex3: Let $C=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 0 & 8\\ 0 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$, find rank of C by used the canonical form transformations way?

Solution:

b) **Normal Form الصيغة الطبيعة:**

أي مصفوفة من رتبة $r \neq 0$ تكون مكافئة الى الشكل الطبيعي N . وهناك أربع صيغ للشكل الطبيعي وهي:

1- (I_r)

2- $(I_r \quad 0)$

3- $\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$

4- $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ex1: Transform this matrix $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$ to normal form then find rank(A)?

Solution:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(-2)}{\underset{H_{13}(1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \overset{H_{23}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{K_{12}(-2)}{\underset{\substack{K_{13}(1) \\ K_{14}(-4)}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{K_3(\frac{1}{5})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{K_{34}(3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{K_{23}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N \ . \quad Then \ \ rank(A)=2$$

Ex2:Transform this matrix $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ to normal form then find rank(B)?

Solution:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(-2)}{\underset{H_{13}(-4)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -13 \end{pmatrix} \overset{H_{23}(-1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{H_{31}(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \overset{H_3(\frac{-1}{5})}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{K_{35}}{\underset{K_{12}(-1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -8 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{K_{23}(8)}{\underset{K_{14}(-1)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{K_{15}(-2)}{\underset{K_{24}(4)}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{K_{25}(5)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=(I_3 \quad 0)= N \qquad Then \ \ rank(B)=3$$

Ex2:Transform this matrix $C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ to normal form then find rank(C)?

Solution:

4- Inverse of matrix by used elementary transformations:

اذا كانت لدينا مصفوفة A من درجة n يمكن ايجاد معكوسة لها بتطبيق العمليات الاولية الصفية فقط على المصفوفة A.
ويحول مصفوفة A الى مصفوفة احادية I، ويحول مصفوفة احادية I الى (A^{-1}) أي أن:

$$(A/I) \overset{row}{\sim} (I/A^{-1})$$

Ex1: Let $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&5\\3&5&6\end{bmatrix}$ find Inverse of matrix by used elementary transformations.

Solution:

$$(A/I)=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&4&5&0&1&0\\3&5&6&0&0&1\end{array}\right]\underset{H_{13}(-3)}{\overset{H_{12}(-2)}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&0&-1&-2&1&0\\0&-1&-3&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\overset{H_{23}}{\sim}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-3&-3&0&1\\0&0&-1&-2&1&0\end{array}\right]\underset{H_{3}(-1)}{\overset{H_{2}(-1)}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&3&3&0&-1\\0&0&1&2&-1&0\end{array}\right]\overset{H_{21}(-2)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-3&-5&0&2\\0&1&3&3&0&-1\\0&0&1&2&-1&0\end{array}\right]\underset{H_{32}(-3)}{\overset{H_{31}(3)}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-3&2\\0&1&0&-3&3&-1\\0&0&1&2&-1&0\end{array}\right]=(I/A^{-1})$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}1&-3&2\\-3&3&-1\\2&-1&0\end{bmatrix}$$

Ex2: Let $B=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&2&3\\3&1&2\end{bmatrix}$ find Inverse of matrix by used elementary transformations.

Solution:

Ex3: Find Inverse of all matrices by used elementary transformations.

1) $C=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 14 & 14 \end{bmatrix}$

2) $D=\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

5- Linear equations if A is non square matrix:

في هذه الحالة قد تكون المعادلات لها حل أو لا تكون لها حل ولمعرفة ذلك نستخدم المصفوفة المدمجة (A/B) فاذا كانت رتبة A مساوية لرتبة (A/B) يمكن حل المعادلات والا تكون المعادلات غير متوافقة (أي أن الحلول للمجاهيل المستخرجة من بعض المعادلات لاتحقق المعادلات الاخرى).

ولمعرفة رتبة كل من A و (A/B) ، نحول (A/B) باستخدام العمليات الصفية فقط الى (C/K) حيث C هو الشكل القمعي للمصفوفة A و K مصفوفة مكافئة الى B . والمعادلات الجديدة (C/K) أو بمعنى آخر (CX=K) لها نفس الحلول كالمعادلات الاصلية (AX=B) وبما ان حل المادلات الجديدة اسهل نحل المعادلات الجديدة.

Note: $\left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} Augmented \\ Matrix \end{matrix} & \end{array}\right] \xrightarrow{\text{(r.e.f) or (r.r.e.f)}} \left[\begin{array}{c|c} R & \end{array}\right]$

1) $R=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array}\right] \to$ exactly one solution. جميع الاعمدة يوجد بها leady

2) $R=\left[\begin{array}{ccc|c} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \to$ No solution. صف صفري، ولكن عمود ال b ليس صفر

3) $R=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \infty$ly many solution. عمود أو اكثر لا يوجد به Leading

Ex1: Solve this system of the linear equations by using elementary transformation:

$$x_1-2x_2+3x_3=4$$
$$x_1+x_2+2x_3=4$$

Solution:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} , \quad B=\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1+2=3 \quad \Rightarrow \quad rank(A)=2$$

$$(A/B)=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right] \overset{H_{12}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{H_2(\frac{1}{3})}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right] \overset{H_{21}(2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7/3 & 4 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}\right]$$

$$=(C/K) \Rightarrow CX=K$$

$\because rank(A)=2 \, and \, rank(A/B)=2 \; then$

بما أن رتبة (A) هي 2 و رتبة (A/B) هي ايضاً 2 . يمكن حل المعادلات ولحلها نحل نظام جديد

$CX=K$

$$x_1+0.x_2+\frac{7}{3}x_3=4 \quad \Rightarrow \quad x_1=4-\frac{7}{3}x_3$$

$$0.x_1+x_2-\frac{1}{3}x_3=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=\frac{1}{3}x_3$$

فلو فرضنا أن ($x_3=a$) يكون هناك مالانهاية من الحلول للمعادلات و هذه الحلول هي:

$$\underline{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4-\frac{7}{3}a \\ \frac{1}{3}a \\ a \end{bmatrix}$$

Ex2: Solve this system of the linear equations by using elementary transformation:

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 2$$
$$3x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right| = 2 + 3 - 1 - (-1 + 2 + 3) = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad rank(A) = 2$$

$$(A/B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \underset{\sim}{H_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \underset{H_{13}(-3)}{\overset{H_{12}(-2)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 4 & -6 \end{array} \right] \underset{\sim}{H_2(\tfrac{-1}{3})}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 4 & -6 \end{array} \right] \underset{\sim}{H_{23}(4)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right] \underset{\sim}{H_{21}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right]$$

$\Rightarrow rank(A/B) = 3 \neq rank(A) = 2$ then this system has no solution.

$\Rightarrow 0 \neq -2$ then this system has no solution.

Ex3: Solve this system of the linear equations by using elementary transformation:

$$3x_1 + 7x_2 - x_3 = 18$$
$$2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 7$$
$$5x_1 + 13x_2 - 7x_3 = 16$$

Solution:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 5 & 13 & -7 \end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix} 18 \\ 7 \\ 16 \end{bmatrix} \quad,\quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 7 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & -2 & 2 & 5 \\ 5 & 13 & -7 & 5 & 13 \end{array}\right| = -105 - 70 - 26 - (-98 - 78 - 25) = -201 + 201 = 0$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 14 = 1 \quad \Rightarrow \quad rank(A) = 2$$

$$(A/B) = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 7 & -1 & 18 \\ 2 & 5 & -2 & 7 \\ 5 & 13 & -7 & 16 \end{array}\right] \overset{H_{21}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 11 \\ 2 & 5 & -2 & 7 \\ 5 & 13 & -7 & 16 \end{array}\right] \underset{H_{13}(-5)}{\overset{H_{12}(-2)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 3 & -12 & -39 \end{array}\right]$$

$$\underset{H_{23}(-3)}{\overset{H_{21}(-2)}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 9 & 41 \\ 0 & 1 & -4 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right] \Rightarrow \; 0 \neq 6 \;,\; rank(A/B) = 3$$

$then\, rank(A) = 2 \neq rank(A/B) = 3$

then this system has no solution.

Ex4: Solve this system of the linear equations by using elementary transformation:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4$$
$$4x_1 - x_2 + 2x_3 = 8$$